

ОБЩЕСТВО «ЗНАНИЕ» РОССИИ
ПРИВОЛЖСКИЙ ДОМ ЗНАНИЙ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*V Международная
научно-техническая конференция
молодых специалистов,
аспирантов и студентов*

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И КОМПЬЮТЕРНОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ
И СОЦИАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ**

Сборник статей

май 2011 г.

Пенза

УДК 51
ББК 22.1
М34

М34 **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ
И СОЦИАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ** : сборник статей
V Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза :
Приволжский Дом знаний, 2011. – с.

ISBN 978-5-8356-1004-4

Под редакцией ***И.В. Бойкова***, доктора физико-математических
наук, профессора

ISBN 978-5-8356-1004-4 © Пензенский государственный
университет, 2011 г.

© АННОО «Приволжский Дом знаний», 2011 г.

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА В ОБЛАСТИ С ФРАКТАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ

И.В. Бойков, Т.В. Елисеева

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Понятие фрактала становится одной из парадигм современной фундаментальной и экспериментальной физики, радиофизики и радиолокации. Поэтому интерес представляют математические методы и вычислительные алгоритмы для моделирования нелокальных процессов и явлений в областях фрактальной геометрии. В работе рассматривается решение первой краевой задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в «снежинке Коха» методом коллокации при выборе соответствующей сетки узлов.

Пусть в ограниченной области $\Omega \subset R^2$ требуется найти решение задачи о распределении потенциального поля: уравнения Лапласа для искомого потенциала $u(x, y)$

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (1)$$

или уравнения Пуассона

$$\Delta u = \phi(x, y) \quad \text{в } \Omega \quad (2)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = f(x, y). \quad (3)$$

В качестве области Ω рассмотрим снежинку Коха с размерностью Хаусдорфа $D_H = \ln 4 / \ln 3$, полученную из равностороннего треугольника [1].

Равносторонний треугольник можно рассматривать как предфрактал 0-го поколения K_0 . Поместим его на сетку с шагом h_0 по оси Ox и шагом $h_0\sqrt{3}$ по оси Oy таким образом, чтобы вершины K_0 совпали с узлами сетки (рис.1). Для построения предфрактала 1-го поколения K_1 строится сетка с шагом h_1 по оси Ox и шагом $h_1\sqrt{3}$ по оси Oy , где $h_1=h_0/3$. На рис.2 изображен предфрактал 2-го поколения K_2 , по каждому направлению шаг h_2 и $h_2\sqrt{3}$ соответственно, $h_2=h_0/3^2$. При описанном способе построения сетки вершины предфрактала K_N совпадают с узлами сетки; шаг h_N по оси Ox и $h_N\sqrt{3}$ по оси Oy , $h_N = h_0/3^N$; длина звена предфрактала $2h_N$. Число вершин (число звеньев) K_N равно $3 \cdot 4^N$.

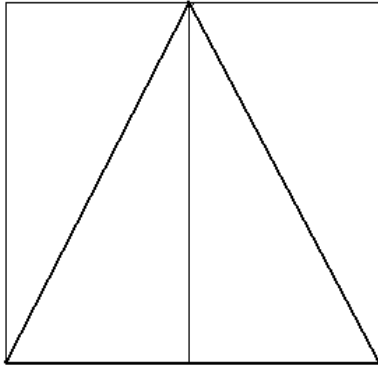


Рис.1

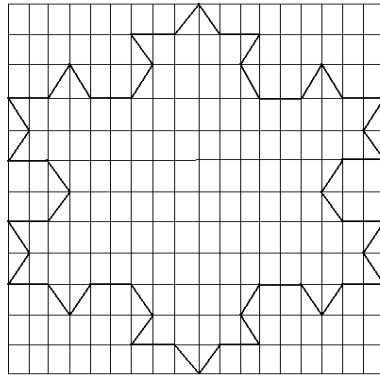


Рис. 2

Решение задачи для уравнения Лапласа (1), (3) и задачи для уравнения Пуассона (2), (3) будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра

$$u_N(x, y) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \alpha_{ij} L_i(x) L_j(y),$$

где произведение $(l+1)(m+1)$ равно сумме s числа узлов сетки, лежащих внутри области K_N , и числа вершин предфрактала K_N . Если $(l+1)(m+1) > s$, то берем несколько дополнительных узлов на границе области (на горизонтальных звеньях). Предфракталы K_N располагаем таким образом, чтобы центр лежал в начале координат и K_N содержался в квадрате $[-1,1] \times [-1,1]$. Неизвестные коэффициенты α_{ij} , $i = \overline{0, l}$, $j = \overline{0, m}$ найдем методом коллокации.

Для задачи (1), (3) система метода коллокации имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \alpha_{ij} \left(L_i''(x_k) L_j(y_k) + L_i(x_k) L_j''(y_k) \right) = 0, & (x_k, y_k) \in K_N, \quad k = \overline{1, v}, \\ \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \alpha_{ij} L_i(x_q) L_j(y_q) = f(x_q, y_q), & (x_q, y_q) \in \partial K_N, \quad q = \overline{1, w}, \end{cases}$$

где (x_r, y_r) – узлы сетки, $v+w=s$.

Для составления модельной задачи рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге D_R с центром в начале координат радиуса R , содержащем K_N :

$$\Delta u(r, \theta) = 0 \text{ в } D_R, \quad u|_{\partial D_R} = \bar{f}(\theta) \quad (4)$$

При $\bar{f}(\theta) = \cos \theta$ решением задачи (4) является $u(r, \theta) = \frac{r}{R} \cos \theta$ или в

декартовых координатах $u(x, y) = \frac{x}{R}$. В качестве модельной возьмем задачу (1), (3) на предфрактале K_N с краевым условием $u|_{(x_k, y_k) \in \partial K_N} = \frac{x}{R}|_{(x_k, y_k) \in \partial K_N}$.

Для задачи (2), (3) система метода коллокации имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \alpha_{ij} \left(L_i''(x_k) L_j(y_k) + L_i(x_k) L_j''(y_k) \right) = \phi(x_k, y_k), & (x_k, y_k) \in K_N, \quad k = \overline{1, v}, \\ \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \alpha_{ij} L_i(x_q) L_j(y_q) = f(x_q, y_q), & (x_q, y_q) \in \partial K_N, \quad q = \overline{1, w}, \end{cases}$$

где (x_r, y_r) – узлы сетки, $v+w=s$.

Для составления модельной задачи рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $\Pi = [-l_1/2, l_1/2] \times [-l_2/2, l_2/2]$, содержащем K_N :

$$\Delta u = \phi(x, y) \text{ в } \Pi, \quad u|_{\partial \Pi} = 0. \quad (5)$$

При $\phi(x, y) = 2 \left(x^2 - \frac{l_1^2}{4} + y^2 - \frac{l_2^2}{4} \right)$ решением задачи (5) является

$u(x, y) = \left(\frac{l_1^2}{4} - x^2 \right) \left(\frac{l_2^2}{4} - y^2 \right)$. В качестве модельной возьмем задачу (2), (3)

на предфрактале K_N с краевым условием

$$u|_{(x_k, y_k) \in \partial K_N} = \left(\frac{l_1^2}{4} - x^2 \right) \left(\frac{l_2^2}{4} - y^2 \right) \Big|_{(x_k, y_k) \in \partial K_N}.$$

В таблице приведены нормы разности $u_N - u_{\text{точное}}$ для модельной задачи.

Поколение предфрактала, N	Задача (1), (3)		Задача (2), (3)	
	С – норма	L_1 – норма	С – норма	L_2 – норма
2	$7,417 \cdot 10^{-9}$	$1,317 \cdot 10^{-9}$	$1,255 \cdot 10^{-9}$	$2,297 \cdot 10^{-10}$
3	$2,176 \cdot 10^{-14}$	$1,274 \cdot 10^{-15}$	$3,064 \cdot 10^{-14}$	$1,708 \cdot 10^{-15}$

Полученные результаты показывают, что с ростом поколения предфрактала $u_N \rightarrow u$. Вопросы асимптотики решений при стремлении порядка предфрактала к бесконечности рассмотрены в [2].

Описанный метод может быть применен к решению других линейных уравнений математической физики в подобных областях с фрактальной границей.

Библиографический список

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
2. Falconer K. Techniques in Fractal Geometry. – New York: John Wiley & Sons, 1997. – 256 p.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Г.Е. Хурсевич, Е.Г.Климец

Белорусский государственный педагогический университет
им. М. Танка,
г. Минск, Беларусь

Рассмотрим систему специального вида:

$$\omega' = \frac{(\omega - \alpha(z))^2 P_1(v, z)}{(v - \beta(z))^2 \prod (v - \beta_i(z))^{n_i}}, \quad v' = \frac{(v - \beta(z))^2 P_2(\omega, z)}{(\omega - \alpha(z))^2}, \quad (1)$$

где P_i многочлены по ω , v , $\beta(z) \neq \beta_i(z)$. Сделаем замену переменных по формулам:

$$\omega_1 = \frac{1}{\omega - \alpha(z)}, \quad v_1 = \frac{1}{v - \beta(z)}.$$

Подставив в систему (1), получим:

$$\omega_1' = -\frac{v_1^2 P_1(\frac{1}{v_1} + \beta(z), z)}{\prod (\frac{1}{v_1} + \beta(z) - \beta_i(z))^{n_i}} + \alpha'(z) \omega_1^2; \quad (2)$$

$$v' = \omega_1^2 P_2(\frac{1}{\omega_1} + \alpha(z), z) + \beta'(z) v_1^2.$$

Заметим, что $P_1(\beta(z), z) \neq 0$, $P_1(\beta_i(z), z) \neq 0$, $P_2(\alpha(z), z) \neq 0$.

Очевидно, что (2) можно записать в виде:

$$\omega_1' = \frac{v_1^{2+l} P_1^{(1)}(v_1, z)}{v_1^n \prod (v_1 - \gamma_i(z))^{n_i}} + \alpha'(z) \omega_1^2; \quad v_1' = \frac{\omega_1^2 P_2^{(1)}(\omega_1, z)}{\omega_1^m} + \beta'(z) v_1^2, \quad (3)$$

где $P_1^{(1)}(v_1, z) = v_1^n \alpha(z) + \dots$, $\sum n_i = l$, $P_2^{(1)}(\omega_1, z) = \omega_1^m b(z) + \dots$.

Причем нетрудно видеть, что $P_1^{(1)}(\gamma_i(z), z) \neq 0$, $P_2^{(1)}(0, z) \neq 0$.

Рассмотрим два априори возможных случая: $m > 2$ и $m \leq 2$. Пусть $m > 2$. Так как $P_1^{(1)}(\gamma_i(z), z) \neq 0$, $P_2^{(1)}(0, z) \neq 0$, то, применяя результаты работы [3], получим, что для отсутствия у решений системы (3) подвижных критических особых точек необходимо, чтобы выполнялись следующие условия: $n - 2 - l \leq 1$, $n - 2 - l \leq 1$, все $n_i = 1$, $m - 2 = 1$.

Считая эти условия выполненными, введем в систему (3) параметр λ по формулам: $\omega_1 = \lambda w$, $z - z_0 = \lambda Z$. Подставив в (3), получим:

$$w' = \frac{v_1^{2+l} P_1^{(1)}(v_1, z)}{v_1^n \prod (v_1 - \gamma_i(z))^{n_i}} + \alpha'(z) \lambda^2 w^2;$$

$$v_1' = \frac{P_2^{(1)}(\lambda w, z)}{w} + \beta'(z) \lambda v_1^2, \quad n_i = 1, i = 1, \dots$$

При $\lambda = 0$ получим упрощенную систему вида:

$$w' = \frac{v_1^{2+l} P_1^{(1)}(v_1, z_0)}{v_1^n \prod (v_1 - \gamma_i(z_0))}, \quad v_1' = \frac{P_2^{(1)}(0, z_0)}{w},$$

которую, исключая w , можно записать в виде одного уравнения второго порядка:

$$v_1'' = (v_1')^2 \left(-\frac{v_1^{2+l} P_1^{(1)}(v_1, z_0)}{v_1^n \prod (v_1 - \gamma_i(z_0))} \right). \quad (4)$$

Степень $P_1^{(1)}(v_1, z_0)$ по v_1 равна n , степень $\prod (v_1 - \gamma_i(z_0))$ по v_1 равна l . Значит, выражение в скобке имеет относительно v_1 целую часть второй степени.

Но тогда, согласно теории, изложенной в [1], уравнение (4) имеет решение с подвижной критической особой точкой.

Пусть теперь $m \leq 2$. Тогда второе уравнение в системе (3) имеет вид:

$$v' = P(\omega, z) + \beta'(z)v_1^2.$$

Предположим, что в первом уравнении есть одно $n_i = 1$ либо $n = 2 + l + 1$. В этом случае введем в систему (3) параметр λ по формулам:

$$v_1 = \gamma_i(z) = \lambda V \quad (\text{либо } v_1 = \lambda V), \quad z - z_0 = \lambda Z.$$

Очевидно, что при $\lambda = 0$ получим упрощенную систему вида:

$$\omega_1' = \frac{\alpha(z_0)}{V}, \quad V' = P(\omega_1, z_0) + \beta'(z_0)\gamma_i^2(z_0) - \gamma_i'(z_0),$$

где $\alpha(z_0)$, очевидно, не равно нулю.

Последняя система эквивалентна одному уравнению вида:

$$\omega_1'' = -\frac{(\omega_1')^2}{\alpha(z_0)} (P(\omega_1, z_0) + \delta(z_0)).$$

Очевидно, что выражение в скобках имеет целую часть. Значит, согласно [1], уравнение имеет решения с подвижными критическими особыми точками.

Поэтому будем считать, что в системе (3) все $n_i > 1$ и $n < 2 + l + 1$.

В этом случае введем в систему (4) параметр λ по формулам:

$$v - \gamma_i(z) = \lambda^{n_i} V, \quad z - z_0 = \lambda^{n_i} Z.$$

При $\lambda=0$ получим упрощенную систему вида:

$$\omega_1' = \frac{\alpha(z_0)}{V^{n_i}}, \quad V' = P(\omega_1, z_0) + \delta(z_0).$$

Получилась система, полностью исследованная в работе [3].

Для отсутствия у ее решений подвижных критических особых точек необходимо, чтобы все $n_i=0$. Тогда система (4) должна иметь вид:

$$\omega_1' = P_1(v_1, z) + \alpha'(z)\omega_1^2, \quad v_1' = P_2(\omega_1, z) + \beta'(z)v_1^2. \quad (5)$$

Так как все $n_i=0$, значит, $\sum n_i=l$, также равна нулю, но тогда $n < 3+l=3$ может принимать лишь значения 0, 1, 2.

Учитывая, что $m \leq 2$, получим, что система (5) является системой класса, полностью изученного в работе [2], где указаны как необходимые, так и достаточные условия отсутствия у её решений подвижных критических особых точек.

Библиографический список

1. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – 2-е изд. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1930. – 436 с.
2. Лукашевич Н.А., Мататов В.И. Системы второго порядка без подвижных критических особых точек // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т.9, №3. – С. 449 – 455.
3. Яблонский А.И. Системы дифференциальных уравнений, критические особые точки которых неподвижны // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т.3, №3. – С. 468 – 478.

УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОЛОГИИ

И.В. Бойков, Г.И. Гринченков

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Применение математических методов в биологии и экологии восходит к раннему Возрождению. Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в 1202 г. дал анализ популяции кроликов, в результате чего в математику введены числа Фибоначчи. Интересно отметить, что числа Фибоначчи используют во многих разделах математики, включая вычислительную математику.

Более общие математические модели были построены Дж.Борелли в 1680 г. Среди известных математических моделей экологии необходимо упомянуть модель Т.Мальтуса (1802 г.) и модель Ферхюльста (1838 г.).

В 1802 г. австрийский священник Мальтус опубликовал модель динамики человеческой популяции, описываемую уравнением

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t),$$

где $N(t)$ – численность популяции в момент времени t ; r – биологический потенциал.

Эта модель была основана на статистическом материале северо-американских штатов и достаточно точно отражала динамику развития населения в северо-американских штатах в начале XIX века.

Однако эта модель не отражала ограниченности пищевых ресурсов. В 1838 г. бельгийский математик Ферхюльст предложил модель, учитывающую ограниченность пищевых и других ресурсов:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - mN^2(t).$$

Интересно отметить, что, основываясь на своих расчетах, Т. Ферхюльст в 40-е гг. XIX столетия предсказал верхнюю границу численности населения Бельгии, равную 9400000. При переписи населения в 1994 г. население Бельгии составляло 10118000. Это очень хорошее предсказание на 150 лет!

Несмотря на существование этих и ряда других моделей, становление математической экологии как науки обычно датируют 1925 годом, когда В.Вольтерра представил [1] свою модель взаимодействия хищника и жертвы, позволившую объяснить ранее непонятное сезонное изменение количества хищных и нехищных рыб в средиземном море.

Система уравнений, предложенная В.Вольтерра, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx^2(t) - cx(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ey(t) + c_1x(t)y(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $y(t)$ – плотность хищных рыб, $x(t)$ – плотность жертв (нехищных рыб), a, b, c, e, c_1 – коэффициенты, не зависящие от времени.

Работа В. Вольтерра положила начало многочисленным исследованиям.

Другую модель взаимодействия хищника и жертвы предложил Лесли [2]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx^2(t) - cx(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = ey(t) - f \frac{y^2(t)}{x(t)}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Сравнительный анализ моделей Вольтерра и Лесли дан в книге Смита [3], в которой приведены аргументы обосновывающие предпочтительность модели Вольтерра модели Лесли.

Представляет интерес объединение моделей Вольтерра и Лесли:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx^2(t) - cx(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = ey(t) + c_1x(t)y(t) - d \frac{y^2(t)}{1+x(t)}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Одним из обобщений модели Вольтерра является модель с убежищем для жертвы.

В случае, если некоторое число особей жертвы (x_r) может найти то или иное убежище или укрытие, делающее их недосыгаемыми для хищника, то эта ситуация описывается системой уравнений [3]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - c(x(t) - x_r)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ey(t) + c_1(x(t) - x_r)y(t). \end{cases} \quad (1.4)$$

В [3] рассматривается случай, когда x_r – постоянное число.

В работе [9] исследована устойчивость решения модели Вольтерра с убежищем, описываемой системой неавтономных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a(t)(x(t) - m_1x^2(t) - k_1(x(t) - \varphi(x(t), y(t)))y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = b(t)y(t)(m_2(x(t) - \varphi(x(t), y(t))) - 1) \end{cases} \quad (1.5)$$

где функция $\varphi(x(t), y(t))$ описывает убежище.

Рассмотрены случаи, когда $\varphi=k$; $\varphi=kx$, $\varphi=ky$.

Недостатком модели Вольтерра является ее «мягкость». «Грубые» модели экологии введены А.Н. Колмогоровым [4].

Эти модели имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a(x(t)) - V(x(t))y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = K(x(t))y(t). \end{cases} \quad (1.6)$$

К этому типу моделей относится и модель Розенцвейга – Мак Артура [5]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) - \varphi(x(t), y(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ey(t) + k\varphi(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (1.7)$$

Модели Вольтерра, в которых учитывается запаздывание, обусловленное временем τ развития хищника, рассмотрели Вангесли и Каннингэм [6]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - cx(t)y(t) - bx^2(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ey(t) + c_1x(t - \tau)y(t - \tau). \end{cases} \quad (1.8)$$

Модели Вольтерра для неперекрывающихся поколений имеют вид [3]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - cx_ny_n, \\ y_{n+1} = -ey_n + c_1x_ny_n, \end{cases} \quad (1.9)$$

где x_n, y_n — число особей жертв и хищников в n -ом году.

Наряду с детерминированными моделями математической экологии большое внимание уделяется стохастическим моделям и моделям, основанным на методах стохастической динамики.

Один из важных вопросов математической экологии — о количестве видов, которые могут существовать в ограниченном ареале, исследование которого начато в работе [7], до сих пор до конца не исследован.

Обобщение моделей Вольтерра, учитывающих фактор насыщения, рассматривалось в книге Базыкина [8]. В частности, в [8] были рассмотрены следующие модели конкуренции жертв и насыщения хищника:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \frac{K - x(t)}{x(t)} - \frac{bx(t)y(t)}{1 + Ax(t)}, \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \frac{dx(t)y(t)}{1 + Ax(t)}; \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - \frac{bx^2(t)y(t)}{1 + Ax^2(t)}, \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \frac{dx^2(t)y(t)}{1 + Ax^2(t)}; \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - \frac{bx(t)y(t)}{1 + Ax(t)} \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \frac{dx(t)y(t)}{1 + Ax(t)} - ey^2(t) \end{cases}, \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - \frac{bx(t)y(t)}{(1 + Ax(t))(1 + By(t))}, \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \frac{dx(t)y(t)}{(1 + Ax(t))(1 + By(t))}; \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - \frac{bx^2(t)y(t)}{1 + Ax^2(t)y(t)} - ex^2(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \frac{dx^2(t)y(t)}{1 + Ax^2(t)y(t)} \end{cases}. \quad (1.14)$$

Динамика сообщества две жертвы – хищник описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [8]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = a_1x_1(t) - b_1x_1(t)y(t) - e_{11}x_1^2(t) - e_{12}x_1(t)x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = a_2x_2(t) - b_2x_2(t)y(t) - e_{22}x_2^2(t) - e_{21}x_1(t)x_2(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + d_1x_1(t)y(t) + d_2x_2(t)y(t). \end{cases} \quad (1.15)$$

Особенностью этой модели является существование таких параметров, что при отсутствии хищника сосуществование двух видов невозможно.

2. Устойчивость обобщенной модели Вольтерра-Лесли

Рассмотрим вначале обобщенную модель Вольтерра-Лесли, описываемую системой дифференциальных уравнений (1.3). Неподвижными точками данной системы является тривиальное решение

$$x(t) = y(t) \equiv 0 \quad (2.1)$$

и

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a - cy}{b} \\ y(t) &= \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2\beta}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\alpha = bce + 2acc_1 + bcc_1 + bd$$

$$\beta = c^2 c_1$$

$$\gamma = b^2 e + abe + abc_1 + a^2 c_1.$$

Исследование устойчивости решения системы (1.3) относительно точки (2.1) не представляет интереса для экологии.

Исследуем устойчивость неподвижной точки (2.2). Введем новые функции:

$$x(t) = x_1(t) + x^*,$$

$$y(t) = x_2(t) + y^*.$$

Подставив $x(t)$, $y(t)$ в систему уравнений (1.3), имеем:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = (a - bx_1(t) - 2bx - cx_2(t) - cy)x_1(t) - cx x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \left(c_1 x_2(t) + cy - d \frac{y^2}{1+x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x_1^{k-1}(t)}{(1+x)^k} \right) x_1(t) + \\ + (e + c_1 x + c_1 x x_2(t) - d \frac{x_2(t)}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x_1^k(t)}{(1+x)^k} - \\ - 2d \frac{y}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x_1^k(t)}{(1+x)^k}) x_2(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Представим систему (2.3) в виде, удобном для дальнейшего исследования:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = (a - bx_1(t) - 2bx - cx_2(t) - cy)x_1(t) - cx x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \left(c_1 x_2(t) + cy - d \frac{y^2}{(1+x)^2} - d \frac{y}{1+x} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x_1^{k-1}(t)}{(1+x)^k} \right) x_1(t) + \\ + (e + c_1 x + c_1 x x_2(t) - d \frac{x_2(t)}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x_1^k(t)}{(1+x)^k} - 2d \frac{y}{1+x} - \\ - 2d \frac{y}{1+x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x_1^k(t)}{(1+x)^k}) x_2(t). \end{cases} \quad (2.4)$$

Пользуясь методом исследования неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенным в [10], можно

показать, что тривиальное решение системы уравнений (2.4) устойчиво при выполнении условий

$$\begin{aligned} |a - 2bx^* - cy^*| - cx^* &< 0, \\ cy^* + e + c_1x^* - 2d \frac{y^*}{1+x^*} &< 0. \end{aligned}$$

3. *Устойчивость математической модели Вольтерра с убежищем*
Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a_1(t)x(t) - b_1(t)x^2(t) - c_1(t)y(t)(x(t) - \varphi(x(t), y(t))) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -a_2(t)y(t) + c_2(t)y(t)(x(t) - \varphi(x(t), y(t))), \end{aligned} \quad (3.1)$$

в которой функция $\varphi(x(t), y(t))$ определяет убежище. Для дальнейшего необходимо наложить на функцию $\varphi(x(t), y(t))$ дополнительные условия. Будем считать, что функция $\varphi(x(t), y(t))$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд во всей области, в которой рассматривается решение системы уравнений (3.1).

Пусть $(x^*(t), y^*(t))$ – решение системы уравнений (3.1) при начальном условии $x^*(t_0), y^*(t_0)$.

Дадим начальным условиям возмущения

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x^*(t_0) + d_0 \\ y(t_0) &= y^*(t_0) + d_1 \end{aligned}$$

и исследуем устойчивость системы уравнений (3.1) при этих возмущениях.

Введем функции $x_1(t), y_2(t)$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x^*(t) \\ y(t) &= x_2(t) + y^*(t). \end{aligned}$$

Подставляя эти функции в систему (3.1), приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = (a_1(t) - b_1(t)x_1(t) - 2b_1(t)x^* - c_1(t)x_2(t) - c_1(t)y^*)x_1(t) + \\ + c_1(t)y^*(\varphi(x_1 + x^*, x_2 + y^*) - \varphi(x^*, y^*)) - c_2x^*x_2(t) + c_1\varphi(x_1 + x^*, x_2 + y^*)x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = (-c_2(t)x_2(t) - c_2(t)y^*)x_1(t) + (-c_2(t)x^* + c_2(t)\varphi(x_1 + x^*, x_2 + y^*))x_2(t) + \\ + c_2(t)y^*(\varphi(x_1 + x^*, x_2 + y^*) - \varphi(x^*, y^*)) \end{cases} \quad (3.2)$$

Продолжим исследование системы (3.2). Для этого разложим функцию $\varphi(x_1(t), x_2(t))$, ограничиваясь членами второго порядка. Отметим, что используемый ниже метод доказательства позволяет ограничиться членами второго порядка. Тогда система уравнений (3.2) приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = (a_1(t) - b_1(t)x_1(t) - 2b_1(t)x^* - c_1(t)x_2(t) - c_1(t)y^* + \\ + c_1(t)y^* \frac{\partial \varphi(x^*, y^*)}{\partial x_1})x_1(t) + (2c_1(t)y^* \frac{\partial^2 \varphi(x^*, y^*)}{\partial x_1 \partial x_2})x_1(t) + \\ + c_1(t)y^* \frac{\partial \varphi(x^*, y^*)}{\partial x_2} - c_2(t)x^* - \varphi(x_1(t) + x^*, x_2(t) + y^*))x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = (-c_2(t)x_2(t) - c_2(t)y^* + c_2(t)y^* \frac{\partial \varphi(x^*, y^*)}{\partial x_2} + \\ + 2c_2(t)y^* \frac{\partial^2 \varphi(x^*, y^*)}{\partial x_1 \partial x_2})x_2(t) + (-c_2(t)x^* + c_2(t)\varphi(x_1(t) + x^*, x_2(t) + y^*) + \\ + c_2(t)y^* \frac{\partial \varphi(x^*, y^*)}{\partial x_2})x_2(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) функции $a_1(t), a_2(t), b_1(t), c_1(t), c_2(t)$ непрерывны при $0 \leq t < \infty$;
- 2) при всех $0 \leq t < \infty$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & a_1(t) - 2b_1(t)x^* - c_1(t)y^* + c_1(t)y^* \frac{\partial \varphi(x^*, y^*)}{\partial x_1} + \\ & + \left| c_1(t)y^* \frac{\partial \varphi(x^*, y^*)}{\partial x_2} - c_2(t)x^* - \varphi(x^*, y^*) \right| < 0 \\ & \left| -c_2(t)y^* + c_2(t)y^* \frac{\partial \varphi(x^*, y^*)}{\partial x_2} \right| - c_2(t)x^* + c_2(t)\varphi(x^*, y^*) + c_2(t)y^* \frac{\partial \varphi(x^*, y^*)}{\partial x_2} < 0. \end{aligned}$$

Тогда тривиальное решение системы уравнений (3.3) устойчиво, и следовательно, устойчиво решение системы уравнений (3.1) относительно решения $(x^*(t), y^*(t))$.

Библиографический список

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1975. — 288 с.

2. Leslie P.H. Some future notes on the use of matrices in population mathematics// Biometrika. – 1948. – V. 35. – P. 213 – 245.
3. Смит Дж. М. Модели в экологии. – М.: Мир, 1976. – 184 с.
4. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей популяций // Проблемы кибернетики. Вып. 25. – М.: Наука, 1972. – С. 100 – 106.
5. Rosenzweig M.L., MacArthur R.H. Graphical representation and stability conditions of predator - prey interaction // American Naturalist. – 1963. – V. 97. – P. 209 – 223.
6. Wangersky P.J., Cunningham W.J. Time lag in prey – predator population models // Ecology. – 1957. – V. 38. – P. 136 – 139.
7. Levin S.A. Community equilibrium and stability, an extension of the competition exclusion principle // American Naturalist (1970) 104. – P. 413 – 423.
8. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 182 с.
9. Ласунский А.В. Состояние равновесия неавтономной модели Лотки – Вольтерра при наличии убежища для жертвы // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 3. – С. 445 – 448.
10. Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. – Пенза: Изд-во Пензенского гос. ун-та, 2008. – 244 с.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

А.Н. Тында, А.Ю. Василькин

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Рассмотрим в операторном виде уравнение, которое называют основным интегральным уравнением плоских контактных задач [1]:

$$c(t)(I + L_1^*)q(x, t) + (I + L_2^*)A^*q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t) - g(x), \quad |x| \leq 1, \quad (1)$$

где $c(t) > 0$, L_1^*, L_2^* – интегральные операторы Вольтерра по времени с неразностными ядрами; A^* – интегральный оператор по координате. Величины q, δ, α, g представляют собой безразмерные контактные давления, осадку, угол поворота и форму основания штампа соответ-

ственно. Уравнения вида (1) хорошо описывают механическое поведение асфальта, бетона, полимеров, стеклопластиков [1].

В большинстве классических постановок контактных задач неизвестными являются контактные давления $q(x, t)$. Запишем уравнение (1) в развернутом виде [6]:

$$\begin{aligned} c(t)q(x, t) + c(t) \int_{t_0}^t K_1(t, \tau)q(x, \tau)d\tau + \int_{-1}^1 k(x, \xi)q(\xi, t)d\xi + \\ + \int_{t_0}^t \int_{-1}^1 k(x, \xi)K_2(t, \tau)q(\xi, \tau)d\xi d\tau = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad t \in [t_0, T], |x| \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая условие $c(t) > 0$, будем без ограничения общности рассматривать далее уравнение

$$\begin{aligned} q(x, t) + \int_{t_0}^t H_1(t, \tau)q(x, \tau)d\tau + \int_a^b K(x, \xi)q(\xi, t)d\xi + \\ + \int_{t_0}^t \int_a^b K(x, \xi)H_2(t, \tau)q(\xi, \tau)d\xi d\tau = f(x, t), \quad t \in [t_0, T], x \in [a, b]. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой линейное двумерное интегральное уравнение смешанного типа и носит название Вольтерра-Фредгольма. Ядра $H_1(t, \tau)$ и $H_2(t, \tau)$ в левой части уравнения могут иметь слабые степенные особенности. Численному решению подобных уравнений посвящены работы [2, 5, 6]. К системам интегральных уравнений смешанного типа приводит также ряд задач математической биологии [3, 5].

Однако при построении численных методов решения интегральных уравнений с особенностями возникает ряд практических сложностей, связанных, в частности, с серьезными ошибками округления. Некоторые подходы, позволяющие уменьшить их влияние, изложены в работе [4].

В настоящей работе предлагается метод численного решения уравнения (3), основанный на аппроксимации точного решения непрерывным интерполяционным сплайном и применении метода последовательных приближений для определения значений сплайна в узлах сетки.

Для построения приближенного решения уравнения (3) введем на прямоугольнике $\Omega : \{(x, t) : a \leq x \leq b, t_0 \leq t \leq T\}$ сетку точками

$$(x_j, t_i) : t_i = t_0 + (T - t_0) \left(\frac{i}{n_1} \right)^{v_1}, i = \overline{0, n_1}, x_j = a + (b - a) \left(\frac{j}{n_2} \right)^{v_2}, j = \overline{0, n_2},$$

где v_1 и v_2 – показатели неравномерности сетки, зависящие от гладкости ядер по каждой переменной и порядка особенности. В случае, если ядра H_1, H_2 и K не имеют особенностей, принимаем

$v_1 = v_2 = 1$. Обозначим через Δ_i сегменты-полосы $\Delta_i : \{(x, t) : a \leq x \leq b, t_{i-1} \leq t \leq t_i, \}, i = \overline{1, n_1}$.

Каждый сегмент Δ_i покроем прямоугольниками

$$\Delta_i^j : \{(x, t) : x_{j-1} \leq x \leq x_j, t_{i-1} \leq t \leq t_i, \}, i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}.$$

На каждом прямоугольнике $\Delta_i^j, i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}$, неизвестная функция аппроксимируется интерполяционным полиномом $P^{j,i}(x, t)$ степени $(r_2 - 1) \times (r_1 - 1)$, построенным по узлам

$$t_i^l = \frac{t_i + t_{i-1}}{2} + \frac{t_i - t_{i-1}}{2} y_l, l = \overline{1, r_1 - 2}, t_i^0 = t_{i-1}, t_i^{r_1-1} = t_i, r_1 > 2;$$

$$x_j^k = \frac{x_j + x_{j-1}}{2} + \frac{x_j - x_{j-1}}{2} y_k, k = \overline{1, r_2}, r_2 \geq 2,$$

где r_1 и r_2 – показатели гладкости ядер по переменным t и x , y_l и y_k – нули полиномов Лежандра степени $r_1 - 2$ и r_2 соответственно. Таким образом, используется замкнутая система узлов по переменной t и незамкнутая по x .

Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде сплайна $q^*(x, t)$, составленного из таких интерполяционных полиномов:

$$P^{k,l}(x, t) = \sum_{i=1}^{r_2} \sum_{j=0}^{r_1-1} C_{i,j}^{k,l} \Psi_{i,j}^{k,l}(x, t), \quad (4)$$

где $C_{i,j}^{k,l} = q(x_k^i, t_l^j)$, а фундаментальные многочлены $\Psi_{i,j}^{k,l}(x, t)$ определяются следующим образом:

$$\Psi_{i,j}^{k,l}(x, t) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{r_2} \frac{(x - x_k^p)}{(x_k^i - x_k^p)} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{r_1-1} \frac{(t - t_l^m)}{(t_l^j - t_l^m)}.$$

Значения $q(x_j^k, t_i^l)$ определяются последовательно для каждого из прямоугольников Δ_i^j , $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{1, n_2}$ по методу последовательных приближений:

$$q_0(x_j^k, t_i^l) = f(x_j^k, t_i^l),$$

$$q_m(x_j^k, t_i^l) = f(x_j^k, t_i^l) - \int_{t_0}^{t_i^l} H_1(t_i^l, \tau) q_{m-1}(x_j^k, \tau) d\tau - \int_a^b K(x_j^k, \xi) q_{m-1}(\xi, t_i^l) d\xi - \quad (5)$$

$$- \int_{t_0}^{t_i^l} \int_a^b K(x_j^k, \xi) H_2(t_i^l, \tau) q_{m-1}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad k = \overline{1, r_2}, l = \overline{0, r_1-1}, m = 1, 2, \dots$$

Преобразуем соотношения (5):

$$q_m(x_j^k, t_i^l) = f(x_j^k, t_i^l) - \sum_{p=1}^{i-1} \int_{t_{p-1}}^{t_p} H_1(t_i^l, \tau) q_{m-1}(x_j^k, \tau) d\tau - \int_{t_{i-1}}^{t_i^l} H_1(t_i^l, \tau) q_{m-1}(x_j^k, \tau) d\tau - \quad (6)$$

$$- \sum_{v=1}^{n_2} \int_{x_{v-1}}^{x_v} K(x_j^k, \xi) q_{m-1}(\xi, t_i^l) d\xi - \sum_{p=1}^{i-1} \int_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{v=1}^{n_2} \int_{x_{v-1}}^{x_v} K(x_j^k, \xi) H_2(t_i^l, \tau) q_{m-1}(\xi, \tau) d\xi d\tau -$$

$$- \int_{t_{i-1}}^{t_i^l} \sum_{v=1}^{n_2} \int_{x_{v-1}}^{x_v} K(x_j^k, \xi) H_2(t_i^l, \tau) q_{m-1}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad k = \overline{1, r_2}, l = \overline{0, r_1-1}, m = 1, 2, \dots$$

Для аппроксимации каждого из интегралов в (6) применяются квадратурные формулы Гаусса, по узлам $t_i^l, l = \overline{1, r_1 - 2}$ по временной переменной и $x_j^k, k = \overline{1, r_2}$ по пространственной. При этом для вычисления интегралов $\int_{t_{i-1}}^{t_i^l}$ вводятся вспомогательные узлы (узлы

квадратурной формулы Гаусса, отображенные на отрезок $[t_{i-1}, t_i^l]$), а в качестве значений подинтегральной функции используются значения сплайнов, построенных на предыдущей итерации.

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет определить контактные давления, а следовательно, и остальные характеристики системы с необходимой точностью.

Библиографический список

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: НАК Институт механики, 1990. – 320 с.
2. Brunner H., Messina E., Time stepping methods for Volterra-Fredholm integral equations // Rendiconti di Matematica, Serie VII, Vol.23 Roma (2003), 329-342.
3. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 368 с.
4. Tynda A.N., Numerical methods for 2D weakly singular Volterra integral equations of the second kind // PAMM, Volume 7, Issue 1, 2020009 – 2020010.
5. Тында А.Н. Численные методы решения нелинейных интегродифференциальных уравнений математической экологии // Труды Международной конференции по вычислительной математике (ICCM-2004). – Новосибирск, 2004. – С. 714 – 721.
6. Тында А.Н., Романов А.Е. Численное решение плоских контактных задач для неоднородных стареющих вязкоупругих оснований // Труды СВМО. – 2010. – Т. 12. – №4. – С. 221 – 226.

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНА,
ПРИМЕНЯЕМЫХ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

А. Н. Тында, Е. Д. Печникова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

1. Постановка задачи

В настоящей работе предлагается численный алгоритм решения нелинейного интегрального уравнения контактных задач для неоднородных вязкоупругих стареющих оснований при их взаимодействии с одиночными штампами. Исследуемые модели многослойных оснований отличаются тем, что различные их слои изготавливаются из различных стареющих материалов, т.е. обладают свойствами возрастной и конструкционной неоднородностей. Поэтому возникает необходимость изучения влияния ползучести, неоднородности и старения на закономерности формирования полей контактных напряжений под штампами, а также на кинематические характеристики (осадки и углы поворотов) самих штампов [1,2].

Основное уравнение плоской контактной задачи, в рамках которой физические свойства слоев могут меняться лишь вдоль слоя, имеет вид [1]:

$$c(t)(I + L_1^*)q(x, t) + (I + L_2^*)A^*q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t) - g(x), \quad |x| \leq 1, \quad (1.1)$$

где $c(t) > 0$; L_1^*, L_2^* – интегральные операторы Вольтерра по времени с неразностными ядрами; A^* – интегральный оператор по координате. Величины q, δ, α, g представляют собой безразмерные контактные давления, осадку, угол поворота и форму основания штампа соответственно. Уравнения вида (1.1) хорошо описывают механическое поведение асфальта, бетона, полимеров, стеклопластиков [1,2].

В работе [4] построен итерационный метод приближенного решения уравнения (1.1) в случае линейных интегральных операторов L_1^*, L_2^* и A^* .

Объектом исследования данной статьи является другой частный случай общего уравнения (1.1), а именно, двумерное нелинейное интегральное уравнение смешанного типа в форме Гаммерштейна следующего вида:

$$q(x, t) - \int_{t_0}^t \int_a^b K(x, \xi, t, \tau) H(\xi, \tau, q(\xi, \tau)) d\xi d\tau = f(x, t). \quad (1.2)$$

Здесь $x \in [a, b]$, $t \in [t_0, T]$, а неизвестной функцией является контактное давление $q(x, t)$. Предполагается также, что функции, входящие в уравнение (1.2), обладают достаточной гладкостью.

2. Приближенное решение

Одним из наиболее эффективных подходов к решению нелинейных задач является линеаризация оператора с помощью модифицированного метода Ньютона-Канторовича [3]. Введем нелинейный оператор F и перепишем (1.2) в виде:

$$Fq \equiv q(x, t) - \int_{t_0}^t \int_a^b K(x, \xi, t, \tau) H(\xi, \tau, q(\xi, \tau)) d\xi d\tau - f(x, t) = 0. \quad (2.1)$$

Тогда модифицированный метод Ньютона-Канторовича в операторной форме можно записать следующим образом:

$$q_{m+1} = q_m - [F'(q_0)]^{-1} (F(q_m)), \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

Здесь $q_0(x, t)$ – начальное приближение, а производная $F'(q_0)$ нелинейного оператора F в точке q_0 определяется следующим образом

$$\begin{aligned} F'(q_0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{F(q_0 + \omega q) - F(q_0)}{\omega} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \left[\omega q(x, t) - \int_{t_0}^t \int_a^b K(\xi, x, t, \tau) H(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau) + \omega q(\xi, \tau)) d\xi d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t \int_a^b K(x, \xi, t, \tau) H(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau)) d\xi d\tau \right] = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \left[\omega q(x, t) - \int_{t_0}^t \int_a^b K(\xi, x, t, \tau) [H(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau) + \omega q(\xi, \tau)) - H(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau))] d\xi d\tau \right] = \\ &= q(x, t) - \int_{t_0}^t \int_a^b \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} K(\xi, x, t, \tau) [H(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau) + \omega q(\xi, \tau)) - H(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau))] d\xi d\tau = \\ &= q(x, t) - \int_{t_0}^t \int_a^b K(\xi, x, t, \tau) H_q(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau)) q(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

$$\text{где } H_q(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau)) = \left. \frac{\partial H(\xi, \tau, q)}{\partial q} \right|_{q=q_0}.$$

Таким образом, итерационный процесс (2.2) можно записать в виде:
 $F'(q_0(t)) \Delta q_{m+1}(t) = -F(q_m), \quad \Delta q_{m+1} = q_{m+1} - q_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$

или в развернутой форме:

$$q_{m+1}(x, t) - \int_{t_0}^t \int_a^b K(\xi, x, t, \tau) H_q(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau)) q_{m+1}(\xi, \tau) d\xi d\tau = \Psi_m(x, t), \quad (2.3)$$

где $m=0, 1, 2, \dots$,

$$\Psi_m(x, t) = f(x, t) + \int_{t_0}^t \int_a^b K(\xi, x, t, \tau) [H(\xi, \tau, q_m(\xi, \tau)) - H_q(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau)) q_m(\xi, \tau)] d\xi d\tau. \quad (2.4)$$

Линейные уравнения итерационного процесса (2.3) – (2.4) являются интегральными уравнениями смешанного типа относительно неизвестной функции $q_{m+1}(x, t)$. При этом ядра уравнений $K(\xi, x, t, \tau) H_q(\xi, \tau, q_0(\xi, \tau))$ остаются неизменными на каждой итерации m . Для решения этих уравнений на каждой итерации можно применять либо сплайн-коллокационные методы, подобные построенному в [5], либо метод последовательных приближений. Последний предпочтителен с точки зрения сложности вычислений, а также в случае недостаточной гладкости входящих в (1.2) функций.

Библиографический список

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: НАК Институт механики, 1990. – 320 с.
2. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П., Функциональный анализ. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
4. Тында А.Н., Романов А.Е. Численное решение плоских контактных задач для неоднородных стареющих вязкоупругих оснований: Труды СВМО. – 2010. – Т. 12, №4. – С. 221 – 226.
5. Tynda A.N., Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations // Bulletin of Middle-Volga Math. Society. – 2008. – Vol.10, No. 2. – P. 68 – 78.
6. Тында А.Н., Щепетихина Е.В. Численное решение двумерных нелинейных интегральных уравнений смешанного типа, описывающих процессы распространения эпидемий // Сб. статей IV Межд. конф. «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем». – Пенза, 2010. – С. 65 – 68.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГИДРОДИНАМИКИ

И. В. Бойков, В. А. Рязанцев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

К числу гидродинамических уравнений, описывающих динамику вязкой несжимаемой жидкости, относятся [3] уравнение непрерывности

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (1)$$

и уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(p) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (2)$$

Выражение (2) определяет уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, постоянная $\eta > 0$ характеризует вязкость жидкости.

Чтобы полностью определить систему, к этим уравнениям необходимо добавить начальное состояние, а также граничное условие, которое состоит в требовании обращения в нуль скорости жидкости на неподвижных твердых поверхностях:

$$\vec{v}|_{\Omega} = 0, \quad (3)$$

где Ω – контур, определяющий границы рассматриваемой области.

Положим [5], что:

1. В выражении $\left(\frac{\eta}{\rho}\right) \Delta u = \left(\frac{\eta}{\rho}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ член $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ значительно

меньше члена $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и, следовательно, может быть отброшен.

2. Внутри пограничного слоя можно пренебрегать разностью давлений в различных точках нормалей к стенке.

При этих предположениях уравнение (2) в двумерном случае заменяется на уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Вместе с уравнением (1), начальным условием и граничным условием (3) уравнение (4) образует систему уравнений Прандтля.

В рамках настоящей работы рассматривается система уравнений Прандтля для нестационарного пограничного слоя при осесимметричном обтекании тела несжимаемой жидкостью [4].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Здесь предполагается, что $\partial p / \partial y = 0$. Задача (5)-(6) рассматривается в области $D\{0 \leq t < T \leq \infty, 0 \leq x \leq X, 0 \leq y < \infty\}$ при условиях

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=0} = v_0(x, y), \quad (7)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(t, x, y) = U(t, x). \quad (8)$$

Рассмотрим важнейший частный случай системы Прандтля. Именно предположим, что жидкость является невязкой. Это означает, что в (5) будет $\nu = 0$, и, следовательно, уравнение (5) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (9)$$

Для исследования сформулированной задачи на устойчивость применяется преобразование Крокко. Если ввести новые независимые переменные

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{u(t, x, y)}{U(t, x)}, \quad (10)$$

то относительно новой неизвестной функции $\omega = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{U(t, x)}$ получим уравнение

$$-\frac{\partial \omega}{\partial \tau} - \eta U(\tau, \xi) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + A(\tau, \xi, \eta) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + B(\tau, \xi, \eta) \omega = 0, \quad (11)$$

в области $\tilde{D}\{0 \leq \tau < \infty, 0 \leq \xi \leq X, 0 \leq \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$\omega|_{\eta=1} = 0, \quad (C(\tau, \xi) - v_0 \omega)|_{\eta=0} = 0 \quad (12)$$

и начальным условием

$$\omega|_{\tau=0} = \frac{1}{U} \frac{\partial u_0}{\partial y}. \quad (13)$$

В (11), (12) функции $A(\tau, \xi, \eta), B(\tau, \xi, \eta), C(\tau, \xi, \eta)$ определяются следующим образом:

$$A(\tau, \xi, \eta) = (\eta^2 - 1) \frac{\partial U(\tau, \xi)}{\partial \xi} + (\eta - 1) \frac{\partial U(\tau, \xi)}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{U(\tau, \xi)}, \quad (14)$$

$$B(\tau, \xi, \eta) = \eta \frac{dr(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{U(\tau, \xi)}{r(\xi)} - \eta \frac{\partial U(\tau, \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{U(\tau, \xi)}, \quad (15)$$

$$C(\tau, \xi) = \frac{\partial U(\tau, \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{U(\tau, \xi)}. \quad (16)$$

В области изменения независимых переменных ξ, η введем равномерную сетку с шагами $h_\xi = X/N_\xi$ и $h_\eta = 1/N_\eta$ (N_ξ, N_η – фиксированные натуральные числа) по переменным ξ и η соответственно. Производные, входящие в (11), приближенно заменим разностными отношениями

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\omega_{ij}(\tau) - \omega_{i-1,j}(\tau)}{h_\xi}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{\omega_{i,j+1}(\tau) - \omega_{ij}(\tau)}{h_\eta}. \quad (17)$$

Используя (17), приближенно заменим уравнение (12) системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{ij}(\tau)}{d\tau} = & -\eta U_{ij}(\tau) \frac{\omega_{ij}(\tau) - \omega_{i-1,j}(\tau)}{h_\xi} + \\ & + A_{ij}(\tau) \frac{\omega_{i,j+1}(\tau) - \omega_{ij}(\tau)}{h_\eta} + B_{ij}(\tau) \omega_{ij}(\tau). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\omega_{ij}(\tau) = \omega(\tau, ih_\xi, jh_\eta)$, $i = 1, \dots, N_\xi$, $j = 1, \dots, N_\eta - 1$.

Перепишем (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{ij}(\tau)}{d\tau} = & \left(-\frac{\eta U_{ij}(\tau)}{h_\xi} - \frac{A_{ij}(\tau)}{h_\eta} + B_{ij}(\tau) \right) \omega_{ij}(\tau) + \left(\frac{\eta U_{ij}(\tau)}{h_\xi} \right) \omega_{i-1,j}(\tau) + \\ & + \left(\frac{A_{ij}(\tau)}{h_\eta} \right) \omega_{i,j+1}(\tau). \end{aligned} \quad (19)$$

Введем новые обозначения:

$$x_k(\tau) = \omega_{ij}(\tau), \quad k = (N_\eta - 1)(i - 1) + j, \quad m = N_\eta - 1, \quad n = mN_\xi. \quad (20)$$

В обозначениях (20) система (19) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_k(\tau)}{d\tau} = & \left(-\frac{\eta U_k(\tau)}{h_\xi} - \frac{A_k(\tau)}{h_\eta} + B_k(\tau) \right) x_k(\tau) + \frac{\eta U_k(\tau)}{h_\xi} x_{k-m}(\tau) + \\ & + \frac{A_k(\tau)}{h_\eta} x_{k+1}(\tau). \end{aligned} \quad (21)$$

При $k = mi + N_\eta - 1$ соотношение (21) заменится на

$$\frac{dx_k(\tau)}{d\tau} = \left(-\frac{\eta U_k(\tau)}{h_\xi} - \frac{A_k(\tau)}{h_\eta} + B_k(\tau) \right) x_k(\tau) + \frac{\eta U_k(\tau)}{h_\xi} x_{k-m}(\tau). \quad (22)$$

Введем обозначение $\Psi(\tau) = \{\psi_{pq}(\tau)\}$, $p, q = \overline{1, n}$, где

$$\psi_{kk}(\tau) = -\frac{\eta U_k(\tau)}{h_\xi} - \frac{A_k(\tau)}{h_\eta} + B_k(\tau), \quad (23)$$

$$\psi_{k, k+1}(\tau) = \frac{A_k(\tau)}{h_\eta}, \quad (24)$$

$$\psi_{k, k-m}(\tau) = \frac{\eta U_k(\tau)}{h_\xi}. \quad (25)$$

Тогда, обозначив $x(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau))^T$, запишем (21) в операторной форме:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \Psi(\tau)x(\tau). \quad (26)$$

Исследуем устойчивость тривиального решения операторного уравнения (26) к возмущению начального условия. Для этого воспользуемся следующей теоремой [1].

Теорема. Для любого решения $x(\tau)$ уравнения (27) в банаховом пространстве B справедливо при $\tau \geq \tau_0$ неравенство

$$\|x(\tau_0)\| \exp \left\{ \int_s^\tau -\Lambda(-\Psi(\sigma)) d\sigma \right\} \leq \|x(\tau)\| \leq \|x(\tau_0)\| \exp \left\{ \int_s^t \Lambda(\Psi(\sigma)) d\sigma \right\}, \quad (27)$$

где $\Lambda(\Psi(\sigma))$ – логарифмическая норма $\Psi(\sigma)$.

В соответствии с (27) для асимптотической устойчивости по Ляпунову системы (21) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{\tau \in [s, \infty)} \Lambda(\Psi(\tau)) = -\alpha, \quad s \geq 0, \quad (28)$$

где α – любое положительное число. Подставляя значения (23) – (25), получим достаточное условие асимптотической устойчивости (21):

$$\frac{|A_k(\tau)| - A_k(\tau)}{h_\eta} + \eta \frac{|U_k(\tau)| - U_k(\tau)}{h_\xi} < -B_k(\tau), \quad (29)$$

которое должно выполняться при $k = \overline{1, n}$ и при любых значениях $\tau \in [s, \infty)$.

Неравенство (29) определяет условия устойчивости решения системы уравнений (18).

Можно показать, используя утверждение приведенной выше теоремы, что для устойчивости решения системы уравнений (18) достаточно выполнения неравенств

$$A_k(\tau) \geq 0, U_k(\tau) \geq 0, B_k(\tau) < 0. \quad (30)$$

при всех k, τ .

Таким образом, получено достаточное условие устойчивости решения системы уравнений (22).

Получим критерий устойчивости решений системы уравнений (18) к возмущению граничного условия.

Положим,

$$\omega_{iN_\eta}(\tau) = \delta_i(\tau), \quad (31)$$

где $\delta_i(\tau), i = \overline{1, N_\xi}$ – непрерывные функции времени τ , причем все функции $\delta_i(\tau)$ ограничены по модулю некоторым фиксированным и достаточно малым числом:

$$|\delta_i(\tau)| \leq \delta, i = \overline{1, N_\xi}, \tau \in [0, \infty). \quad (32)$$

Тогда при $j = N_\eta - 1$ будет

$$\begin{aligned} \frac{dx_k(\tau)}{d\tau} = & \left(-\frac{\eta U_k(\tau)}{h_\xi} - \frac{A_k(\tau)}{h_\eta} + B_k(\tau) \right) x_k(\tau) + \frac{\eta U_k(\tau)}{h_\xi} x_{k-m}(\tau) + \\ & + \frac{A_k(\tau)}{h_\eta} \delta_i(\tau). \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, задача свелась к исследованию устойчивости решения системы дифференциальных уравнений с возмущением. Соответствующий критерий получен в [6]. Пользуясь результатами [6], можно показать, что при выполнении условий

$$A_k(\tau) \geq 0, U_k(\tau) \geq 0, B_k(\tau) < 0$$

система уравнений (19) устойчива к возмущению граничных условий.

Остались неисследованными следующие вопросы:

1) сходимость решения приближенной системы уравнений (18) к решению исходного уравнения (11);

2) в случае, если решение системы уравнений (18) сходится к решению уравнения (11), исследовать связь между устойчивостью решений системы уравнений (11) и устойчивостью решения уравнения Прандтля.

Этим исследованиям авторы планируют посвятить следующие работы.

Библиографический список

1. Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2008. – 244 с.
2. Далецкий Ю.Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. – Т. VI. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2001. – 736 с.
4. Олейник О.А. Математические задачи теории пограничного слоя // Успехи мат. наук. – 1968. – Т. 23, №3. – С. 3 – 65.
5. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 576 с.
6. Бойков И.В., Захарова Ю.Ф., Дмитриева А.А. Устойчивость простейшей математической модели иммунологии // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. – 2008. – №4. – С. 32 – 46.

УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИММУНОЛОГИИ

И.В. Бойков, Ю.Ф. Захарова, А.А. Дмитриева, О.А. Будникова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В настоящее время в литературе активно исследуется несколько математических моделей иммунологии.

Одна из этих моделей описывается [1, 2] системой, состоящей из трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \lambda - dx - \beta xv, \\ \frac{dy}{dt} = \beta xv - ay, \\ \frac{dv}{dt} = ky - uv, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где $\lambda, d, \beta, a, k, u$ – параметры, $\lambda, d, \beta, a, k, u > 0$.

Система (1.1) описывает динамику трех видов клеток: x – неинфицированные клетки, y – инфицированные клетки, v – свободные вирусы.

Система уравнений (1) имеет несколько неподвижных точек [1]:

первая неподвижная точка

$$x^* = \lambda / d, y^* = 0, v^* = 0; \quad (1.2)$$

вторая неподвижная точка

$$x^* = \frac{au}{\beta k}, y^* = \frac{\lambda \beta k - dau}{a \beta k}, v^* = \frac{\lambda \beta k - dau}{a \beta u}. \quad (1.3)$$

Обобщением этой модели являются следующие модели, предложенные в работе [3]. Первая из предложенных в [3] моделей имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda - dx - \sum_{i=1}^n \beta_i xy_i, \\ \frac{dy_i}{dt} &= (\beta_i x - a_i - p_i z_i) y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{dz_i}{dt} &= c_i y_i - b_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь x – множество неинфицированных клеток, y_i – множество клеток, инфицированных i -тым вирусом $i=1,2,\dots,n$; z_i – иммунные клетки, специфические к i -му вирусу. Отметим, что в этой модели клетка может быть инфицирована только одним видом вирусов.

Вторая модель имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda - dx - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i xy_i}{1 + \eta_i z_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\beta_i xy_i}{1 + \eta_i z_i} - a_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{dz_i}{dt} &= c_i y_i - b_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Эта модель учитывает влияние количества иммунных клеток на рост числа инфицированных клеток.

Третья модель имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda - dx - \sum_{i=1}^n \beta_i xy_i, \\ \frac{dy_i}{dt} &= (\beta_i x - a_i - p_i z_i) y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{dz_i}{dt} &= (c_i y_i - b_i) z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

При ряде достаточно существенных ограничений в [3] исследована устойчивость по Ляпунову моделей (1.3), (1.4), (1.5).

Исторически более ранними являются математические модели иммунологии, предложенные Г.И. Марчуком [4]. Простейшая (базисная) модель иммунологии имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &= (\beta - \gamma F(t))V(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \xi(m)\alpha V(t-\tau)F(t-\tau) - \mu_c(C(t) - C^*), \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \rho C(t) - (\mu_f + \eta \gamma V(t))F(t), \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma V(t) - \mu_m m(t),\end{aligned}\tag{1.7}$$

где $V(t)$ – концентрация патогенных размножающихся антигенов, $F(t)$ – концентрация антител; $C(t)$ – концентрация плазматических клеток; $m(t)$ – относительная характеристика пораженного органа; β – коэффициент размножения антигенов; γ – коэффициент нейтрализации антигена антителом при их встрече;

$\xi(m)$ – коэффициент восстановления деятельности организма;

μ_c – коэффициент, определяющий уменьшение числа плазматических клеток за счет старения;

C^* – постоянный уровень плазматических клеток в здоровом организме;

τ – время, в течение которого осуществляется формирование каскада плазматических клеток;

α – коэффициент, учитывающий вероятность встреч антител с антигенами и определяющей скорость образования новых клеток, μ_m – коэффициент пропорциональности, характеризующий обратную величину восстановления органа в e раз; σ – некоторая константа, своя для каждого заболевания; ρ – скорость производства антител одной плазматической клеткой; μ_f – коэффициент, обратно пропорциональный времени распада антител; η – коэффициент, определяющий уменьшение числа антител за счет их реакции с антигенами.

Система (1.7) имеет несколько неподвижных точек. Одна из них описывает состояние здорового организма:

$$V(t_0) = 0, C(t_0) = C^*, F(t_0) = F^* = \rho C^* / \mu_f, m(t_0) = 0;\tag{1.8}$$

вторая – имитирует хроническое заболевание:

$$\begin{cases} \bar{V} = \frac{\mu_c \mu_f (\beta - \gamma F^*)}{\beta(\alpha \rho - \mu_c \eta \gamma)}, \\ \bar{C} = \frac{\alpha \mu_i - \eta \mu_c \gamma^2 C^*}{\gamma(\alpha \rho - \mu_c \eta \gamma)}, \\ \bar{F} = \beta / \gamma, \\ \bar{m} = \sigma \bar{V} / \mu_m. \end{cases} \quad (1.9)$$

Черта сверху означает, что речь идет о стационарном нетривиальном решении.

В [4] исследована устойчивость задачи Коши (1.4), (1.5) и, при ряде дополнительных условий, устойчивость задачи Коши (1.7), (1.9).

В работе [5] рассмотрено обобщение модели (1.4) в предположении, что коэффициенты зависят от времени. Исследована устойчивость решения, описывающего поведение здорового организма.

Обобщением простейшей модели является следующая система интегро-дифференциальных уравнений, предложенная в работе [6].

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (\beta - \gamma F(t) - d_b B(t))V(t), \quad t \geq 0, \\ \frac{dC}{dt} &= \int_{t-\tau}^{t-\tau_c} \alpha N \xi(m(t))V(s)B(s)ds - \mu_c(C(t) - C^*), \quad t \geq 0, \\ \frac{dF}{dt} &= \rho C(t) - (\mu_f + \eta \gamma V(t))F(t), \quad t \geq 0, \\ \frac{dm}{dt} &= (1 - m(t)) \int_{t-\tau_m}^t f(t-s)V(s)ds - \mu_m m(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

$$\frac{dB}{dt} = b_b \rho_b \xi(m(t))B(t - \tau_b)V(t - \tau_b) - b_b B(t)V(t) - \mu_b(B(t) - B^*), \quad t \geq 0. \quad (1.10)$$

Здесь дополнительно к обозначениям, используемым в системе уравнений (1.7), вводятся следующие обозначения:

τ_c – момент времени в каскадном процессе, длящемся промежутки времени τ , в который появляются незрелые плазматические клетки;

τ_m – промежуток времени, в течение которого бактерия оказывает патогенное действие на орган-мишень после своей нейтрализации за счет продуктов метаболизма; $f(t)$ – известная неотрицательная финитная функция. Множитель $(1 - m(t))$ в четвертом уравнении

системы (1.10) оказывает лимитирующее действие на скорость поражения органа бактериями.

В работе [6] доказана единственность решения системы уравнений (1.10) при начальных условиях, заданных на сегменте $[-\max(\tau, \tau_m, \tau_b), 0]$, и доказана экспоненциальная устойчивость системы (1.10) с начальными условиями, характеризующими состояние здорового организма.

В монографии [4] исследована динамика математических моделей противовирусного и противобактериального иммунного ответов.

Математическая модель противовирусного иммунного ответа описывается следующей системой интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_f}{dt} &= vC_v + nb_{ce}C_vE - \gamma_{ve}FV_f - \gamma_{vm}MV_f - \gamma_{vc}(C^* - C_v - m)V_f, \\
\frac{dM_v}{dt} &= \gamma_{mv}MV_f - \alpha_m M_v, \\
\frac{dH_E}{dt} &= b_H^{(E)} \left[\xi(m)\rho_H^{(E)}M_v(t - \tau_H^{(E)})H_E(t - \tau_H^{(E)}) - M_vH_E \right] - \\
&\quad - b_p^{(H_E)}M_vH_EE + \alpha_H^{(E)}(H_E^* - H_E), \\
\frac{dH_B}{dt} &= b_H^{(B)} \left[\xi(m)\rho_H^{(B)}M_v(t - \tau_H^{(B)})H_B(t - \tau_H^{(B)}) - M_vH_B \right] - \\
&\quad - b_p^{(H_B)}M_vH_BB + \alpha_H^{(B)}(H_B^* - H_B), \\
\frac{dE}{dt} &= b_p^{(E)} \left[\xi(m)\rho_E M_v(t - \tau_E)H_E(t - \tau_E)E(t - \tau_E) - M_vH_EE \right] - \\
&\quad - b_{ec}C_vE + \alpha_E(E^* - E), \\
\frac{dB}{dt} &= b_p^{(B)} \left[\xi(m)\rho_B M_v(t - \tau_B)H_B(t - \tau_B)B(t - \tau_B) - M_vH_BB \right] + \alpha_B(B^* - B), \\
\frac{dP}{dt} &= b_p^{(P)} \xi(m)\rho_P M_v(t - \tau_P)H_B(t - \tau_P)B(t - \tau_P) + \alpha_P(P^* - P), \\
\frac{dF}{dt} &= \rho_F P - \gamma_{fv}V_f F - \alpha_F F, \\
\frac{dC_v}{dt} &= \sigma V_f(C^* - C_v - m) - b_{ce}C_vE - b_m C_v, \\
\frac{dm}{dt} &= b_{ce}C_vE + b_m C_v - \alpha_m m,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где $V_f(t)$ – количество свободно циркулирующих в организме вирусов;

$M_v(t)$ – количество стимулированных (антигенпрезентирующих) макрофагов; $H_E(t)$ – количество T -лимфоцитов-помощников клеточного иммунитета; $H_B(t)$ – количество T -лимфоцитов-помощников гуморального иммунитета; $E(t)$ – количество T -клеток-эффекторов (киллеров) (количество антител); $B(t)$ – количество B -лимфоцитов, $P(t)$ – количество плазматических клеток; $C_v(t)$ – количество зараженных вирусами клеток органа-мишени; $m(t)$ – нефункционирующая часть пораженного вирусами органа-мишени.

Здесь $\alpha_E, b_p^B, b_p^P, \rho_B, \alpha_B, \alpha_p, \rho_F, \gamma_{FV}, \alpha_F, \sigma, b_{CE}, \alpha_m$ – параметры, характеризующие динамику процессов, протекающих в организме.

Описание этих параметров дано в [4].

Математическая модель противобактериального иммунного ответа описывается системой интегродифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= \beta K - \gamma_{KM} M_K K - \gamma_{KF} FK, \\ \frac{dM_K}{dt} &= \gamma_{MK} M_K K - \alpha_m M_K, \\ \frac{dH_B}{dt} &= b_H^{(B)} \left[\xi(m) \rho_H^{(B)} M_K (t - \tau_H^{(B)}) H_B (t - \tau_H^{(B)}) - M_K H_B \right] - \\ &\quad - b_p^{(H_B)} M_K H_B B + \alpha_H (H_B^* - H_B), \\ \frac{dB}{dt} &= b_p^{(B)} \left[\xi(m) \rho_B M_K (t - \tau_B) H_B (t - \tau_B) B (t - \tau_B) - M_K H_B B \right] + \alpha_B (B^* - B), \\ \frac{dP}{dt} &= b_p^{(P)} \xi(m) \rho_P M_K (t - \tau_P) H_B (t - \tau_P) B (t - \tau_P) + \alpha_P (P^* - P), \\ \frac{dF}{dt} &= \rho_F P - \eta_E \gamma_{FK} KF - \alpha_F F, \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma K - \alpha_m m,\end{aligned}\tag{1.12}$$

где $K(t)$ – количество патогенных бактерий в органе мишени; $M_K(t)$ – количество стимулированных макрофагов лимфоидной ткани органа-мишени, $H_B(t)$ – количество T -клеток-помощников данной специфичности; $B(t)$ – количество B – лимфоцитов данной специфичности; $P(t)$ – количество плазматических клеток, вырабатывающих антитела данной

специфичности; $F(t)$ – количество специфических антител; $m(t)$ – доля пораженных клеток органа-мишени.

В качестве начальных приближений берется состояние здорового организма:

$$\begin{aligned} K(0) &= K_0, \quad M_K(0) = 0, \quad H_B(0) = H_B^*, \quad B(0) = B^*, \quad P(0) = P^*, \\ F(0) &= F^* = \frac{\rho_F P^*}{\alpha_F}, \quad m(0) = 0; \quad M_K(T)H_B(t) = 0, \quad -\tau_H^{(B)} \leq t < 0, \\ M_K(t)H_B(t)B(t) &= 0, \quad -\tau \leq t < 0, \quad \tau = \max(\tau_B, \tau_P). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Противовирусная и противобактериальная модели объединены в единую математическую модель вирусно-бактериальной инфекции [4, с. 142 – 143].

В монографии [4] проведено численное моделирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, описывающих протекание болезней при вирусных, бактериальных и смешанных заражениях.

В работе [7] исследована устойчивость решений в математических моделях противовирусного и противобактериального иммунного ответов в следующих предположениях:

1) рассматривается иммунный ответ здорового организма на единичное заражение;

2) предполагается, что коэффициенты в уравнениях (1.12) и (1.13) зависят от времени.

Работа [8] посвящена ряду обобщений математических моделей противовирусного и противобактериального иммунного ответов. Особое внимание в [8] уделено параметризации в математических моделях заболеваний.

В данной работе исследуется устойчивость математических моделей (1.1), (1.5), (1.7) при различных начальных условиях.

2. Устойчивость моделей вирусной динамики

Исследуем устойчивость математической модели вирусной динамики, описываемой системой дифференциальных уравнений (1.1) при начальных условиях (1.2).

Введем новые переменные:

$$x_1 = x - x^*, \quad y_1 = y, \quad v_1 = v. \quad (2.1)$$

Тогда система (1.1) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -dx_1(t) - \beta x_1(t)v_1(t) - \frac{\beta\lambda}{d}v_1(t), \\ \frac{dy_1(t)}{dt} &= \beta x_1(t)v_1(t) + \frac{\beta\lambda}{d}v_1(t) - ay_1(t), \quad \frac{dv_1(t)}{dt} = ky_1(t) - uv_1(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Используя метод, предложенный в работе [9], можно показать, что система уравнений (2.2) и, следовательно, система уравнений (1.1) устойчива при следующих соотношениях параметров $d > \sqrt{\beta\lambda}, a > \beta\lambda/d, u > k$.

Рассмотрим вторую неподвижную точку:

$$x^* = \frac{au}{\beta k}, y^* = \frac{\lambda\beta k - dau}{a\beta k}, v^* = \frac{\lambda\beta k - dau}{a\beta u}. \quad (2.3)$$

Исследуем устойчивость решения системы (1.1) в окрестности неподвижной точки (2.3). Введем новые неизвестные: $x_1 = x - x^*$, $y_1 = y - y^*$, $z_1 = z - z^*$.

Тогда система уравнений (1.1) трансформируется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\left(d + \beta v_1(t) + \frac{\lambda\beta k - dau}{au}\right)x_1(t) - \frac{au}{k}v_1(t), \\ \frac{dy_1(t)}{dt} &= \left(\beta v_1(t) + \frac{\lambda\beta k - dau}{au}\right)x_1(t) - ay_1(t) + \frac{au}{k}v_1(t), \\ \frac{dv_1(t)}{dt} &= ky_1(t) - uv_1(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Используя метод, предложенный в [9], можно показать, что система (2.4) и, следовательно, система (1.1) устойчива при следующих соотношениях параметров:

$$d + \frac{\lambda\beta k - dau}{au} > \frac{au}{k}, \quad a > \left| \frac{\lambda\beta k - dau}{au} \right| + \frac{au}{k}, \quad u > k.$$

Можно показать, что система уравнений (2.4) и, следовательно, система уравнений (1.1) асимптотически устойчива при выполнении условий:

$$\begin{cases} -d + \frac{\lambda\beta k - dau}{au} + \frac{au}{k} < -\chi, \\ -a + \left| \frac{\lambda\beta k - dau}{au} \right| + \frac{au}{k} < -\chi, \\ -u + k < -\chi, \end{cases}$$

где χ – некоторое положительное число.

Обобщением модели (1.1) на случай одновременного заражения n вирусами является модель (1.4). Так как согласно этой модели каждая клетка может быть инфицирована только одним вирусом, то критерии

устойчивости, сформированные выше для модели (1.1), дословно переносятся на модель (1.4).

3. Устойчивость простейшей модели иммунного ответа в случае хронического заболевания

В монографии [4] приведены условия асимптотической устойчивости задачи Коши (1.7), (1.9) при $\alpha \rightarrow \infty$.

Исследуем устойчивость этой задачи при ряде других условий.

Введем новые функции $x_1 = V - \bar{V}$, $x_2 = C - \bar{C}$, $x_3 = F - \bar{F}$,
 $x_4 = m - \bar{m}$.

Тогда система уравнений (1.4) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = (\beta - \gamma\bar{F} - \gamma x_3(t))x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \xi(m)\alpha(x_1(t-\tau)x_3(t-\tau) + x_1(t-\tau)\bar{F}) - \mu_c x_2(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = -\eta\gamma\bar{F}x_1(t) + \rho x_2(t) - (\mu_f + \eta x_1(t))x_3(t), \\ \frac{dx_4(t)}{dt} = \sigma x_1(t) - \mu_m x_4(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

Исследуем асимптотическую устойчивость системы уравнений (3.1) при малых возмущениях вектора $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$.

Пусть в промежутке времени $[T_0, T_1]$, $T_1 - T_0 > \tau$ система (3.1) имеет нулевое решение, которое нарушается в момент времени T_1 возмущением

$$X(T_1) = (x_1(T_1), \dots, x_4(T_1)) \quad (3.2)$$

с нормой $\|X(T_1)\| = \delta_1$. В этом разделе норма вектора $f = (f_1, \dots, f_n)$ определяется формулой $\|f\| = \max_{1 \leq k \leq n} |f_k|$, $n = 1, 2, \dots$.

Исследуем устойчивость задачи Коши (3.1) – (3.2). Покажем, что при выполнении условий

$$\begin{cases} \beta - \gamma\bar{F} < 0, \\ \bar{F}\alpha\xi(m) - \mu_c < 0, \\ \eta\gamma\bar{F} + \rho - \mu_f < 0, \\ \sigma - \mu_m < 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

задача Коши (3.1) – (3.2) устойчива. Доказательство проведем от противного. Предположим, что в момент времени T_2 , $T_2 > T_1$ траектория задачи Коши (3.1) – (3.2) покидает шар $B(0, \delta_2)$, $\delta_2 = 2\delta_1$, проходя через точку $x_*(T_2)$. Для определенности будем считать, что $\|x_*(T_2)\| = |x_4(T_2)|$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Представим систему уравнений (3.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= (\beta - \gamma\bar{F} - \gamma x_3(t))x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \xi(m)\alpha \left(\frac{x_1(t-\tau)}{x_4(T_2)} x_4(t)x_3(t-\tau) + \frac{x_1(t-\tau)}{x_4(T_2)} x_4(t)\bar{F} \right) - \mu_c x_2(t) - \\ &\quad - \xi(m)\alpha \left(\frac{x_1(t-\tau)}{x_4(T_2)} x_3(t-\tau)(x_4(t) - x_4(T_2)) - \frac{x_1(t-\tau)}{x_4(T_2)} (x_4(t) - x_4(T_2)\bar{F}) \right), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -\eta\gamma\bar{F}x_1(t) + \rho x_2(t) - (\mu_f + \eta x_1(t))x_3(t), \\ \frac{dx_4(t)}{dt} &= \sigma x_1(t) - \mu_m x_4(t).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Так как $\frac{|x_1(t-\tau)|}{|x_4(T_2)|} < 1$ и $|x_3(t-\tau)| \leq \delta_2$ при $t \in [T_0, T_2]$, то к системе (3.4)

можно применить критерии устойчивости, предложенные в книге [9]. Из этих критериев следует, что при выполнении условий (3.3) система уравнений (3.1) устойчива.

Перейдем к исследованию асимптотической устойчивости. Выше было показано, что при выполнении условий (3.3) система уравнений (3.1) устойчива, и, следовательно, $\|x(t)\| \leq \delta_2$ при $t \leq T$.

Покажем, что если существует такое положительное число χ , $\chi > 0$, что выполняются условия

$$\begin{cases} \beta - \gamma\bar{F} < -\chi, \\ \bar{F}\alpha\xi(m) - \mu_c < -\chi, \\ \eta\gamma\bar{F} + \rho - \mu_f < -\chi, \\ \sigma - \mu_m < -\chi, \end{cases}\tag{3.5}$$

то система уравнений (3.1) асимптотически устойчива.

Из первого из уравнений системы (3.1) следует, что при $t \geq T_2$

$$x_1(t) = x_1(T_2) \exp\left\{\int_{T_2}^t (\beta - \gamma \bar{F} - \gamma x_3(\tau)) d\tau\right\},$$

и, следовательно, $|x_1(t)| \leq |x_1(T_2)| \exp\left\{\int_{T_2}^t (\beta - \gamma \bar{F} + \gamma \delta_2) d\tau\right\}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t)| = 0$.

Введем обозначения:

$$f_2(t) = \xi(m)\alpha(x_1(t-\tau)x_3(t-\tau) + x_1(t-\tau)\bar{F}), \quad f_3(t) = -\eta\gamma\bar{F}x_1(t) + \rho x_2(t).$$

Тогда второе уравнение системы уравнений (3.1) можно представить в виде

$$\frac{dx_2(t)}{dt} + \mu_c x_2(t) = f_2(t), \quad (3.6)$$

где $f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Решением уравнения (3.6) при начальном условии $x_2(T_2)$ является функция

$$x_2(t) = e^{-\mu_c(t-T_2)}(x_2(T_2) + \int_{T_2}^t f_2(\tau)e^{\mu_c(\tau-T_2)} d\tau),$$

и, следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_2(t)| = 0$.

Аналогичным образом доказывается, что $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_3(t)| = 0$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_4(t)| = 0$.

Таким образом, доказано, что при выполнении условий (3.5) тривиальное решение системы (3.1) асимптотически устойчиво, и, следовательно, хроническое заболевание, описываемое простейшей моделью иммунологии (1.4), не реагирует на малые возмущения.

Пользуясь проведенными выше рассуждениями, можно определить область притяжения неподвижных точек (1.8) и (1.9). Очевидно, областью притяжения неподвижных точек (1.8) и (1.9) системы (3.1) является множество векторов $x(t)$, таких, что $\|x(t)\| \leq \delta_*$ и

$$\begin{cases} \beta - \gamma \bar{F} + \gamma \delta_* < 0, \\ \xi(m)\alpha(\delta_*^2 + \delta_* \bar{F}) - \mu_c < 0, \\ \eta\gamma F \delta_* + \rho \delta_* + \eta \delta_* - \mu_f < 0, \\ \sigma \delta_* - \mu_m < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующее обобщение простейшей модели, в которую введены слагаемые, препятствующие неограниченному размножению вирусов и неограниченному увеличению числа плазматических клеток:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = (\beta - \delta V - \gamma F)V, \\ \frac{dC}{dt} = \xi(m)\alpha V(t-\tau)F(t-\tau) - \mu_{1c}(C - C^*) - \mu_{2c}(C - C^*)^2, \\ \frac{dF}{dt} = \rho C - (\mu_f^0 + \mu_f F + \eta \gamma V)F, \\ \frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Первая неподвижная точка очевидна:

$$V(0) = 0, F(0) = \frac{-\mu_f^0 + \sqrt{\mu_f^0 + \rho C^* \mu_f}}{2\mu_f}, C(0) = C^*, m(0) = 0. \quad (3.8)$$

Устойчивость системы (3.7) относительно неподвижной точки (3.8) исследована в [10].

Система (3.7) имеет и другие неподвижные точки. Однако их выписать в явном виде через буквенные коэффициенты системы не удастся. Поэтому исследование устойчивости нужно проводить для конкретных значений параметров системы.

Пусть система уравнений (3.7) имеет неподвижную точку

$$\bar{V}, \bar{C}, \bar{F}, \bar{m}. \quad (3.9)$$

Неподвижная точка (3.9) описывает состояние, отличное от состояния здорового организма.

Сделаем замену переменных $V(t) = \bar{V} + x_1(t)$, $C(t) = \bar{C} + x_2(t)$, $F(t) = \bar{F} + x_3(t)$, $m(t) = \bar{m} + x_4(t)$. Кроме того, для определенности положим функцию $\xi(m) = 1 - \delta m$, $0 < \delta < 1$. В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= (\beta - 2\delta\bar{V} - \delta x_1(t) - \gamma\bar{F} - \gamma x_3(t))x_1(t) - \gamma\bar{V}x_3(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= (\alpha\bar{F} + \alpha x_3(t-\tau) - 2\delta\bar{m}\alpha\bar{F} - 2\delta\bar{m}\alpha x_3(t-\tau) - \\ &\quad - 2\delta\alpha x_4(t)\bar{F} - 2\delta x_4(t)\alpha x_3(t-\tau) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\delta^2 \bar{m}^2 \alpha \bar{F} + 2\delta^2 \bar{m}^2 \alpha x_3(t-\tau) + 2\bar{m}x_4(t)\delta^2 \alpha \bar{F} + \\
& +2\bar{m}^2 x_4(t)\delta^2 \alpha x_3(t-\tau) + \delta^2 x_4^2(t)\alpha \bar{F} + 2\delta^2 \bar{m}^2 \alpha x_3(t-\tau) + \\
& + \delta^2 x_4^2(t)\alpha x_3(t-\tau))x_1(t-\tau) - \\
& - \mu_{1c}x_2(t) - 2\mu_{2c}(\bar{C} - C^*)x_2(t) - \mu_{2c}x_2^2(t) + \\
& + (\alpha \bar{V} - 2\delta \bar{m} \alpha \bar{V} - 2\delta x_4(t)\alpha \bar{V} + \delta^2 \bar{m}^2 \alpha \bar{V} + \\
& + 2\bar{m}x_4(t)\delta^2 \alpha \bar{V} + \delta^2 x_4^2(t)\alpha \bar{V} + x_3(t-\tau) + \delta^2 \alpha \bar{V} \bar{F} x_4^2(t), \\
& \frac{dx_3(t)}{dt} = -(\eta \gamma x_3(t) - \eta \gamma \bar{F})x_1(t) + \rho x_2(t) - \\
& - (\mu_f^0 + \mu_f \bar{F} + \bar{F} + x_3(t) + \eta \gamma \bar{V})x_3(t), \\
& \frac{dx_4(t)}{dt} = \sigma x_1(t) - \mu_m x_4(t). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Покажем, что при выполнении условий

$$\begin{aligned}
& \beta - 2\delta \bar{F} - \gamma \bar{F} + \gamma \bar{F} < 0, \\
& -\mu_{1c} - 2\mu_{2c}(\bar{C} - C^*) + |\alpha \bar{F} - 2\delta \bar{m} \alpha \bar{F} + 2\delta^2 \bar{m}^2 \alpha \bar{F}| + \\
& + |\alpha \bar{V} - 2\delta \bar{m} \alpha \bar{V} + \delta^2 \bar{m} \alpha \bar{V}| < 0, \\
& -(\mu_f^0 + \mu_f \bar{F} + \bar{F} + \eta \gamma \bar{V}) < 0, \quad -\mu_m + \sigma < 0 \tag{3.11}
\end{aligned}$$

система (3.10) устойчива.

Доказательство проведем от противного.

Предположим, что траектория решения системы уравнений (3.10) при начальном приближении

$$x(T_0) = (x_1(T_0), \dots, x_4(T_0)), \quad \|x(T_0)\| = \delta_0 \tag{3.12}$$

в момент времени T_1 покидает шар $B(0, \delta_1)$, $\delta_1 = 2\delta_0$, проходя через точку $(x_1(T_1), \dots, x_4(T_1))$, причем $|x_4(T_1)| = \delta_1$. (Случаи, когда $|x_1(T_1)| = \delta_1, |x_2(T_1)| = \delta_1, |x_3(T_1)| = \delta_1$, рассматриваются аналогично).

Представим систему уравнений (3.10) в следующей форме:

$$\begin{aligned}
& \frac{dx_1(t)}{dt} = (\beta - 2\delta \bar{V} - \delta x_1(t) - \gamma \bar{F} - \gamma x_3(t))x_1(t) - \gamma \bar{V} x_3(t), \\
& \frac{dx_2(t)}{dt} = g_1(t) \frac{x_1(t-\tau)}{x_4(T_1)} x_4(t) - \mu_{1c} x_2(t) - 2\mu_{2c}(\bar{C} - C^*) - \mu_{2c} x_2^2(t) + \\
& + g_2(t) \frac{x_3(t-\tau)}{x_4(T_1)} x_4(t) + \delta^2 \alpha \bar{V} \bar{F} x_4^2(t) - g_1(t) \frac{x_1(t-\tau)}{x_4(T_1)} (x_4(t) - x_4(T_1)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_2(t) \frac{x_3(t-\tau)}{x_4(T_1)} (x_4(t) - x_4(T_1)), \\
& \frac{dx_3(t)}{dt} = -(\eta\gamma x_3(t) - \eta\gamma \bar{F})x_1(t) + \rho x_2(t) - \\
& (\mu_f^0 + \mu_f \bar{F} + \bar{F} + x_3(t) + \eta\gamma \bar{V})x_3(t), \\
& \frac{dx_4(t)}{dt} = \sigma x_1(t) - \mu_m x_4(t).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Можно показать, что если выполнены условия (3.12), то при достаточно малом значении δ_0 существует такой промежуток времени $[T_1, T_1 + \Delta T]$, в течение которого логарифмическая норма системы уравнений (3.12) отрицательна и меньше некоторого отрицательного числа $-\varepsilon$, причем $|x_4(t) - x_4(T_1)| < \varepsilon \delta_1 / 2$. Тогда, повторяя рассуждения, приведенные в [9], можно показать, что в промежутке времени $[T_1, T_1 + \Delta T] \|x(t)\| \leq \delta_1$, что противоречит утверждению о том, что траектория решения задачи Коши (3.13), (3.12) не покидает шар $B(0, \delta_1)$. Устойчивость тривиального решения уравнения (3.11) доказана. Отсюда следует устойчивость при достаточно малых возмущениях хронического процесса заболеваний, описываемых моделью (3.7).

Перейдем к исследованию асимптотической устойчивости. Повторяя рассуждения, проведенные выше при исследовании асимптотической устойчивости системы уравнений (1.7), можно показать, что если найдется такое положительное число $\chi, \chi > 0$, при котором выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
& \beta - 2\delta \bar{V} - \gamma \bar{F} + \gamma \bar{V} < -\chi, \\
& -\mu_{1c} - 2\mu_{2c} (\bar{C} - C^*) + |\alpha \bar{F} - 2\delta \bar{m} \alpha \bar{F} + 2\delta^2 \bar{m}^2 \alpha \bar{F}| + \\
& + |\alpha \bar{V} - 2\delta \bar{m} \alpha \bar{V} + \delta^2 \bar{m}^2 \alpha \bar{V}| < -\chi, \\
& -(\mu_f^0 + \mu_f \bar{F} + \bar{F} + \eta\gamma \bar{V})c < -\chi, \quad -\mu_m + \sigma < -\chi,
\end{aligned}$$

то система уравнений (3.7) асимптотически устойчива.

Библиографический список

1. Wodarz D. Killer Cell Dynamics Mathematical and Computational Approaches to Immunology // Springer Science+ Business Media, LLC, 2007. – 220 p.

2. Nowak M.A. , May R.M. Virus dynamics. Mathematical principles of immunology and virology. – Oxford University Press, 2000. – 237 p.

3. Wasa Y., Michor F., Nowak M. Some basic properties of immune selection // Journal of Theoretical Biology. – 2004. – V. 229. – P. 179 – 188.

4. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. – М.: Наука, 1991. – 304 с.

5. Бойков И.В., Захарова Ю.Ф., Дмитриева А.А. Устойчивость простейшей математической модели иммунологии // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. – 2008. – №4. – С. 32 – 46.

6. Левченко О.Ю. Математическое моделирование противобактериального иммунного ответа // Научный журнал КубГАУ. – 2011. – № 66 (02). – С. 1 – 12.

7. Бойков И.В., Захарова Ю.Ф., Дмитриева А.А. Устойчивость моделей противовирусного и противобактериального иммунного ответа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. – 2008. – №4. – С. 47 – 57.

8. Романюха А.А., Руднев С.Г., Зуев С.М. Анализ данных и моделирование инфекционных заболеваний // Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования: В 2 т. – Т. 2. Математическое моделирование / отв. ред. В. П. Дымников / Ин-т вычисл. математики. – М. : Наука, 2005. – С. 352 – 403.

9. Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. – Пенза: Изд-во Пензенского гос. ун-та, 2008. – 244 с.

10. Бойков И.В., Захарова Ю.Ф., Дмитриева А.А., Будникова О.А. Устойчивость математических моделей противобактериального иммунного ответа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. – 2011. – №2. – С. 80 – 89.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.Ф. Добрынина, А.И. Шляпошникова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Работа посвящена исследованию задачи о собственных значениях, которая возникает, когда метод Фурье применен, чтобы решить краевую задачу для уравнения теплопроводности для двухуровневого составного объекта с температурой тепла и разрывами потока в границах раздела. Установлена

формула разложения по собственным функциям. Полученные результаты используются для того, чтобы создать решение уравнения тепла.

Рассмотрим уравнение для температур в твердых $0 \leq x \leq b$, составленное на границах, при $0 \leq x < a$ одного материала в контакте с границами $a < x \leq b$ другого материала:

$$\rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) \quad x \in [0, a) \cup (a, b].$$

Предполагаем, что у функции плотности или диффузности $\rho(x)$ есть уравнение вида:

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1^2, & x \in [0, a), \\ \rho_2^2, & x \in (a, b]. \end{cases}$$

где ρ_1 и ρ_2 – положительные константы, и что функционирует испарение $q(x)$ произвольная действительная функция, интегрируемая на $[0, a) \cup (a, b]$.

При $x = a$ берем граничные условия вида:

$$u(a-0, t) = \alpha u(a+0, t), \quad (1.2)$$

$$u_x(a-0, t) = \beta u_x(a+0, t), \quad (1.3)$$

и на концах $x = 0$ и $x = b$ берем нулевые температурные условия

$$u(0, t) = u(b, t) = 0. \quad (1.4)$$

Начальные температуры составного объекта дают

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, a) \cup (a, b] \quad (1.5)$$

Условие (1.2) в случае $\alpha \neq 1$ такое, что температура на границах $x = a$ конечного перехода, когда точка приближается к границе от любого направления, и условие (1.3), когда $\beta \neq 1$, конечный переход в $x = a$ потока тепла. Эти условия представляют также импульсное явление в $x = a$.

Опишем формально схему решения методом Фурье. Ищем нетривиальное решение уравнения (1.1) вида:

$$u(x, t) = e^{-\lambda t} y(x), \quad x \in [0, a) \cup (a, b], \quad (1.6)$$

где λ – сложная константа, и $y(x)$ является функцией, не зависящей от t , которая может зависеть от λ и которая должна быть нетривиальным решением. Подставим (1.6) в (1.1) – (1.4), получаем:

$$-y'' + q(x)y = \lambda \rho(x)y, \quad x \in [0, a) \cup (a, b]; \quad (1.7)$$

$$y(a-0) = \alpha y(a+0), \quad y'(a-0) = \beta y'(a+0); \quad (1.8)$$

$$y(0) = y(b) = 0. \quad (1.9)$$

Так, функция (1.6) является нетривиальным решением задачи (1.1) – (1.4) тогда и только тогда, когда λ – собственное значение, и $y(x)$ является соответствующей собственной функцией уравнений (1.7) – (1.9).

Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ все собственные значения уравнений (1.7) – (1.9) и $v_1(x), v_2(x), \dots$ соответствующие собственные функции. Затем, используя линейность уравнений (1.1) – (1.4), получим функцию

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} v_n(x). \quad (1.10)$$

Для собственных функций $\varphi(x, \lambda_n)$ отношение ортогональности определяется формулой [3]:

$$\int_0^a p(x) \varphi(x_1 \lambda_n) \varphi(x_1 \lambda_m) dx + \alpha \beta \int_a^b p(x) \varphi(x_1 \lambda_n) \varphi(x_1 \lambda_m) dx = 0 \quad (n \neq m).$$

Обозначим

$$a_n = \int_0^a p(x) \varphi^2(x_1 \lambda_n) dx + \alpha \beta \int_a^b p(x) \varphi^2(x_1 \lambda_n) dx.$$

Функции

$$v_n(x) = \frac{\varphi(x_1 \lambda_n)}{\sqrt{a_n}} \quad (n=1, 2, \dots) \text{ образуют ортонормальную систему собственных функций:}$$

$$\int_0^a \rho(x) v_n(x) v_m(x) dx + \alpha \beta \int_a^b \rho(x) v_n(x) v_m(x) dx = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Коэффициенты c_n в

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x), \quad x \in [0, a) \cup (a, b]$$

и, следовательно в (1.10), определены [3]

$$c_n = \int_0^a \rho(x) v_n(x) f(x) dx + \alpha \beta \int_a^b \rho(x) v_n(x) f(x) dx$$

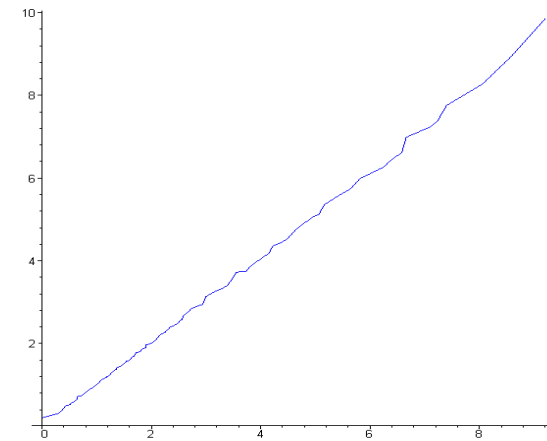
$$\rho(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{x}, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу:

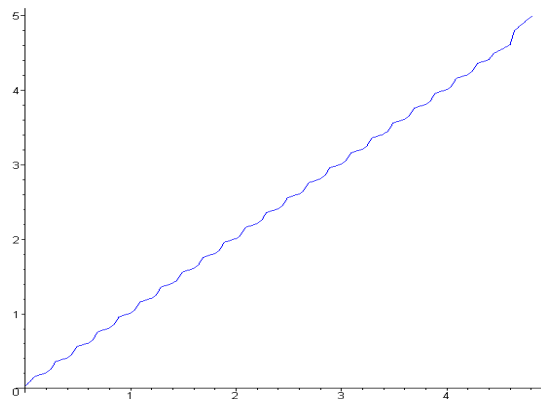
При $x = 1$ берем граничные условия вида: $u(1, t) = \alpha u(1, t)$, $u_x(1, t) = \beta u_x(1, t)$ и на концах $x = 0$ и $x = b$ берем нулевые температурные условия $u(0, t) = u(b, t) = 0$. Начальные температуры составного объекта дают $u(x, 0) = f(x) = 1$, $x \in [0, 1) \cup (1, 2]$. Найдем коэффициенты:

$$\begin{aligned}
alpha &:= \int_0^a p1(x) \cdot \left[\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{\pi \cdot x^2 \cdot n} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x^2}{x + \frac{1}{x}} \right) \right]^2 dx + \\
&+ \int_a^b p2(x) \cdot \left[\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2\pi \cdot n} \right) \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot \sin \left[\frac{n \cdot \pi \cdot \left[x + \left(\frac{1}{x} \right) \cdot (x-1) \right]}{x + \frac{1}{x}} \right] - \left(x - \frac{1}{x} \right) \cdot \sin \left[\frac{n \cdot \pi \cdot \left[x - \left(\frac{1}{x} \right) \right]}{x + \frac{1}{x}} \right] \right]^2 dx \\
c &:= \int_0^a p1(x) \cdot \frac{\left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{\pi \cdot x^2 \cdot n} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x^2}{x + \frac{1}{x}} \right) \cdot x}{\sqrt{alpha}} dx + \\
&+ \int_a^b p2(x) \cdot \frac{\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2\pi \cdot n} \right) \cdot \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot \sin \left[\frac{n \cdot \pi \cdot \left[x + \left(\frac{1}{x} \right) \cdot (x-1) \right]}{x + \frac{1}{x}} \right] - \left(x - \frac{1}{x} \right) \cdot \sin \left[\frac{n \cdot \pi \cdot \left[x - \left(\frac{1}{x} \right) \cdot (x-1) \right]}{x + \frac{1}{x}} \right] \right]}{\sqrt{alpha}} dx
\end{aligned}$$

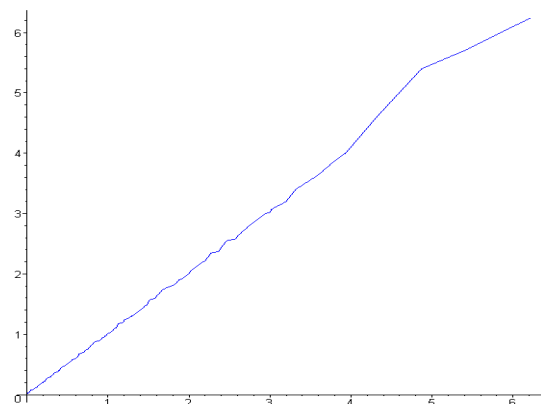
При $c = 0.6586244527$ получим:
точное решение



приближенное решение



погрешность



Библиографический список

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – Изд. 4-е. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
3. Expansion for a Sturm-Liouville Boundary Value Problem with Impulse Serife Faydaoglu and Gusein Sh. Guseinov // International Journal of Pure and Applied Mathematics, 8 (2003). – P. 137 – 170.

РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НЕСАМОСOPЯЖЕННЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ф.В. Лубышев, А. Р. Манапова

Башкирский государственный университет,
г. Уфа, Россия

Характер конкретных постановок задач оптимального управления для распределенных систем существенно зависит от того, куда входят управления: в свободные члены уравнений состояния или в коэффициенты уравнений, а также линейными или нелинейными УМФ описываются состояния систем управления. В научной литературе наиболее мало изучены нелинейные задачи оптимального управления (особенно когда нелинейность задачи оптимизации обусловлена входением управлений в коэффициенты уравнений, в том числе в коэффициенты при старших производных). Нелинейные задачи оптимального управления весьма существенно отличаются от линейных задач, где управление осуществляется путем внешних воздействий на систему. При исследовании таких задач численными методами возникает ряд трудностей, связанных с нелинейностью, некорректностью, невыпуклостью, малой гладкостью состояний.

Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы. Центральными здесь являются вопросы «конструирования» алгоритмов, сходимости по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций.

В настоящей работе, по тематике примыкающей к [1], [2], построены и исследованы разностные аппроксимации нелинейных задач оптимального управления, описываемых задачами Дирихле для несамосопряженного квазилинейного уравнения эллиптического типа в произвольной выпуклой области $\Omega \subset R^2$, с управлениями, содержащимися в переменных коэффициентах уравнения состояния при старших и младших производных. Установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация построенных аппроксимаций по Тихонову (см. [3]). Полученные результаты установлены при той естественной, незамысловатой степени гладкости состояния, которая гарантируется теоремой о разрешимости задачи для состояния в Соболевском классе $W_{(2,0)}^2(\Omega)$.

Пусть управляемый процесс описывается следующей задачей Дирихле:

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(k(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 b_\alpha(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} + d(\xi) q(u) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega, \\ u(\xi) = 0, \quad \xi \in \Gamma, \quad (1)$$

в области $\Omega \subset R^2$ произвольной формы. Будем предполагать, что Ω – выпуклая область с границей $\Gamma \in C^2$; q, d, f – известные функции; $g = (g_1, g_2, g_3, g_4) = (k_1, k_2, b_1, b_2)$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $f \in L_2(\Omega)$, функция q определена на R со значениями в R и удовлетворяет условиям

$$q(0)=0, \quad 0 \leq q_0 \leq [q(s_1) - q(s_2)] / (s_1 - s_2) \leq L_q < \infty,$$

для всех $s_1, s_2 \in R, s_1 \neq s_2$; $d \in L_2(\Omega)$, $\zeta_3 \leq d \leq \bar{\zeta}_3$ п.в. на Ω .

Введем множество допустимых управлений

$$U = \prod_{k=1}^4 U_k \subset B = W_\infty^1(\Omega) \times W_\infty^1(\Omega) \times L_\infty(\Omega) \times L_\infty(\Omega);$$

$$U_\alpha = \left\{ k_\alpha \in W_\infty^1(\Omega) : 0 < \nu \leq k_\alpha(\xi) \leq \bar{\nu} < \infty, \left| \frac{\partial k_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \right| \leq R_\alpha, \text{ п.в. на } \Omega \right\}, a=1, 2;$$

$$U_\alpha = \left\{ b_\alpha \in L_\infty(\Omega) : \zeta_\alpha \leq b_\alpha(\xi) \leq \bar{\zeta}_\alpha, \text{ п.в. на } \Omega \right\}, a=1, 2. \quad (2)$$

Предполагается выполнение следующих условий: $-m \leq \zeta_1 \leq \bar{\zeta}_1 \leq m$,

$-p \leq \zeta_2 \leq \bar{\zeta}_2 \leq p$, $\bar{\nu}, R_\alpha, m, p = \text{const} > 0$;

$$\delta_0 = \max_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \nu}} \left\{ \frac{\nu - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{D^2} + \lambda - \frac{m^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p^2}{4\varepsilon_2} \right\} > 0, \quad \text{где } D = \text{diam } \Omega; \quad \zeta_3, \bar{\zeta}_3 -$$

некоторые постоянные, а λ – любая из следующих констант:

а) $\lambda = q_0 \zeta_3$, $\zeta_3 \geq 0$; б) $\lambda = \zeta_3$ – любая константа, когда $q(u) = u$;

в) $\lambda = -L_q \zeta_0$, где $\zeta_0 = \max \{ |\zeta_3|, |\bar{\zeta}_3| \}$.

Зададим функционал цели $J : U \rightarrow R^1$ в виде:

$$J(g) = \int |u(\xi, g) - u_0(\xi)|^2 d\Omega, \quad (3)$$

где $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ – заданная функция; $u(g)$ – функция состояния системы, соответствующая управлению g . Под решением прямой задачи (1) при

фиксированном управлении $g \in U$ понимается функция

$u \equiv u(g) \in V \equiv W_2^1(\bar{\omega})$, удовлетворяющая для $\forall \eta \in V$ тождеству

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \eta + d(\xi) q(u) \eta \right] d\Omega = \int_{\Omega} f(x) \eta d\Omega. \quad (4)$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве U функционал цели $g \rightarrow J(g)$, точнее, на решениях задачи (4), отвечающих всем допустимым управлениям $g \in U$, требуется минимизировать функционал цели (3).

Библиографический список

1. Лубышев Ф.В. Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1991. – Т. 31, №1. – С. 17 – 30.
2. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2007. – Т.47, №3. – С. 376 – 396.
3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. 1981. – 400 с.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ЗАМКНУТЫХ КОНТУРАХ

Н.Ю. Кудряшова, И.С. Петров

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

При решении многих задач теории упругости, физики, аэродинамики, гравиметрии и других приходится сталкиваться с бисингулярными интегральными уравнениями (БИУ). В связи с тем, что точные решения известны только для очень немногих классов БИУ, возникает необходимость в разработке численных методов решения БИУ. Приближенным методам вычисления сингулярных интегралов и решения БИУ посвящены много-

численные работы, среди которых. в первую очередь, следует указать монографии [2,3].

Рассмотрим БИУ

$$\begin{aligned} a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + \frac{b(t_1, t_2)}{\pi i} \int_{\gamma_1}^{\square} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \frac{c(t_1, t_2)}{\pi i} \int_{\gamma_2}^{\square} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 + \\ + \frac{d(t_1, t_2)}{\pi^2} \iint_{\gamma_1 \gamma_2}^{\square} \frac{x(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Предположим, что $a(t_1, t_2), b(t_1, t_2), c(t_1, t_2), d(t_1, t_2) \in H_{\alpha, \alpha, \gamma_1, \gamma_2}$ – единичные окружности на комплексных плоскостях z_1 и z_2 .

Пользуясь преобразованием Гильберта, сведем уравнение (1) к уравнению с ядром Гильберта, которое для простоты обозначений запишем как

$$\begin{aligned} a(s_1, s_2)x(s_1, s_2) + b(s_1, s_2) \int_0^{2\pi} x(\sigma_1, s_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} d\sigma_1 + \\ + c(s_1, s_2) \int_0^{2\pi} x(s_1, \sigma_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_2 + \\ + d(s_1, s_2) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 = f(s_1, s_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Отметим, что все проведенные ниже рассуждения справедливы и для более общих уравнений, включающих в левую часть и компактный интегральный оператор. Функции $b(s_1, s_2)$, $c(s_1, s_2)$, $d(s_1, s_2)$ предполагаются такими, что выполнены приводимые ниже условия:

$$\begin{aligned} b(v_i^*, v_j^*) \int_{v_i}^{v_{i+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} d\sigma_1 + c(v_i^*, v_j^*) \int_{v_j}^{v_{j+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_2 + \\ + d(v_i^*, v_j^*) \int_{v_i}^{v_{i+1}} \int_{v_j}^{v_{j+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Выберем систему узлов:

$$v_k^1 = v_k^2 = v_k = \frac{\pi k}{n}, k = 0, \dots, 2n, v_k^{1*} = v_k^{2*} = v_k^* = \frac{\pi k}{n} + h, 0 < h < \frac{\pi}{2n}, k = 0, \dots, 2n-1.$$

Величина параметра h будет определена ниже.

Решение будем искать в виде полинома

$$x_{nn}(s_1, s_2) = \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{l=0}^{2n-1} a_{kl} \psi_k(s_1) \psi_l(s_2),$$

где $\psi_k(s)$ — фундаментальные полиномы по узлам $v_k^*, k=0, \dots, 2n-1$,

$$\psi_k(s) = \begin{cases} 0, & s = v_l^*, \quad l \neq k, \\ 1, & s = v_k^*. \end{cases}$$

Заменим в уравнении (2) сингулярные интегралы кубатурными формулами. Пусть $s_1 \in [v_i, v_{i+1}), s_2 \in [v_j, v_{j+1})$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} x(s_1, s_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} d\sigma_1 = \sum_{k=0, k \neq i-1, i+1}^{2n-1} x(v_k^*, v_j^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} d\sigma_1 + r_1, \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} x(s_1, s_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_2 = \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} x(v_i^*, v_k^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_2 + r_2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s_1, s_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 = \\ & \sum_{k=0, k \neq i-1, i+1}^{2n-1} \sum_{l=0, l \neq j-1, j+1}^{2n-1} x(v_i^*, v_j^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}} \int_{v_l}^{v_{l+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + r_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Заменим теперь в уравнении (2) сингулярные и бисингулярные интегралы квадратурными формулами (4)-(6) и к полученному выражению применим метод коллокации. В результате имеем:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{a}(v_i^*, v_j^*) \mathbf{x}(v_i^*, v_j^*) + \\
& + \mathbf{b}(v_i^*, v_j^*) \sum_{k=0, k \neq i-1, i+1}^{2n-1} x(v_k^*, v_j^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} d\sigma_1 + \\
& + c(v_i^*, v_j^*) \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} x(v_i^*, v_k^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_2 + \\
& + d(v_i^*, v_j^*) \sum_{k=0, k \neq i-1, i+1}^{2n-1} \sum_{l=0, l \neq j-1, j+1}^{2n-1} x(v_i^*, v_j^*) \times
\end{aligned}$$

$$\int_{v_k}^{v_{k+1}} \int_{v_k}^{v_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 = f(v_i^*, v_j^*), \quad i, j = 0, \dots, 2n-1.$$

Теорема. Пусть уравнение (1) имеет единственное решение $x^*(t_1, t_2) \in H_{a,a}$, и пусть функции $a(t_1, t_2)$, $b(t_1, t_2)$, $c(t_1, t_2)$, $d(t_1, t_2)$, $f(t_1, t_2) \in H_{a,a}$, $0 < a \leq 1$. Тогда при выполнении условий

$$\left| a_{ij} + 2b_{ij} \ln \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}} + 2c_{ij} \ln \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}} + 2c_{ij} \ln^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}} \right| > D \ln^2 n$$

$$i, j = 0, 1, \dots, 2n-1;$$

существуют такие значения h , что система уравнений (7) имеет единственное решение $x_n^*(t_1, t_2)$, и справедлива оценка:

$$\|x^* - x_n^*\| \leq A \frac{\ln^5 n}{n^\alpha}.$$

Замечание. Если уравнение (1) имеет несколько решений, то последовательность x_n^* при $n \rightarrow \infty$ стремится к одному из этих решений.

Библиографический список

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.

3. Бойков И.В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2004. – 316 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА

Е.В. Пастухова

Филиал «СЕВМАШВТУЗ» Санкт-Петербургского государственного
морского технического университета,
г. Северодвинск, Россия

Одним из самых известных примеров описания динамики взаимодействующих популяций являются уравнения Лотки – Вольтерра. Рассмотрим модель взаимодействия хищников и их добычи, когда между особями одного вида нет соперничества. Пусть x_1 и x_2 – число жертв и хищников соответственно. Предположим, что относительный прирост

жертв $\frac{x_1'}{x_2}$ равен $a - bx_2$, $a, b > 0$, где a – скорость размножения жертв,

bx_2 – потери от хищников. Развитие популяции хищников зависит от количества пищи (жертв): при отсутствии пищи ($x_1=0$) относительная

скорость изменения популяции хищников равна $\frac{x_2'}{x_2} = -c$, $c > 0$, нали-

чие пищи компенсирует убывание, и при $x_1 > 0$ имеем $\frac{x_2'}{x_2} = -c + dx_1$,

$d > 0$. Таким образом, система Лотки – Вольтерра имеет вид:

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2, \end{cases}$$

где $a, b, c, d > 0$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа MathCAD, содержащий определение системы Лотки – Вольтерра, фазовый портрет системы при $a = 4$, $b = 2,5$, $c = 2$, $d = 1$ и графики решения с начальным условием $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 1$.

ORIGIN := 1 a := 4 b := 2.5 c := 2 d := 1

$$F(t, x) := \begin{bmatrix} (a - b \cdot x_2) \cdot x_1 \\ (-c + d \cdot x_1) \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{pmatrix} 2 \\ 1.6 \end{pmatrix} \quad X1 := \text{rkfixed}(X, 0, 10, 400, F)$$

$$X := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X2 := \text{rkfixed}(X, 0, 10, 400, F)$$

$$X := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X3 := \text{rkfixed}(X, 0, 10, 400, F)$$

$$X := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X4 := \text{rkfixed}(X, 0, 10, 400, F) \quad i := 1..400$$

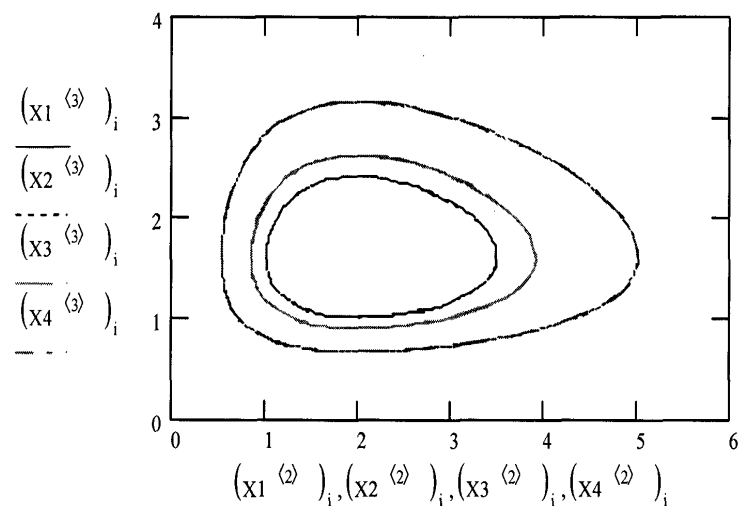


Рис.1. Фазовый портрет системы «хищник – жертва»

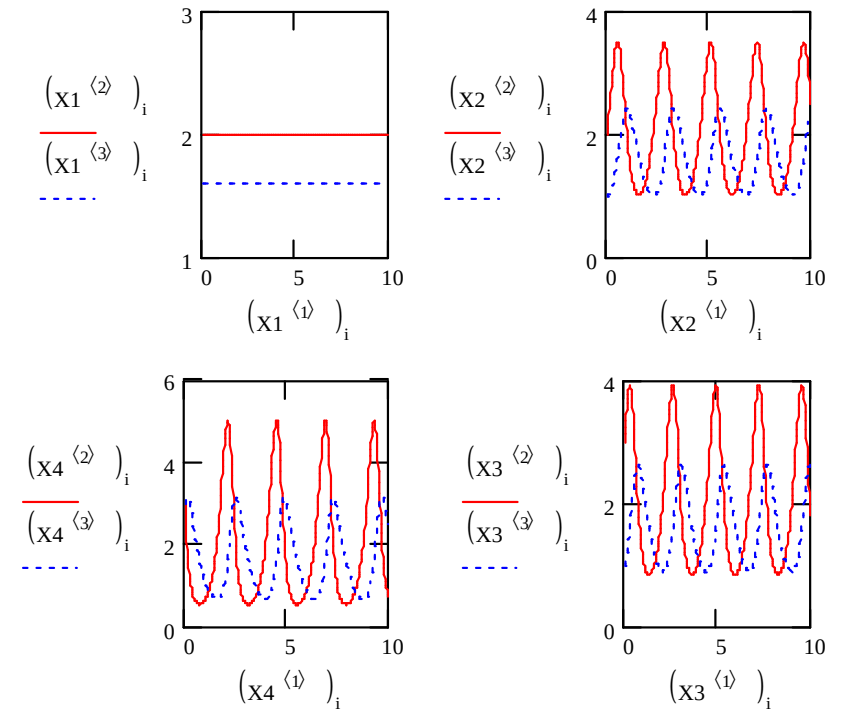


Рис.2. Решение системы при различных начальных условиях

Видно, что процесс имеет колебательный характер. При заданном начальном соотношении числа особей обоих видов 3:1 обе популяции сначала растут. Когда число хищников достигает величины $b=2,5$, популяция жертв не успевает восстановиться, и число жертв начинает убывать. Уменьшение количества пищи через некоторое время начинает сказываться на популяции хищников, и когда число жертв достигает величины $x_1 = \frac{c}{d} = 2$ (в этой точке $x_2' = 0$), число хищников тоже начинает сокращаться вместе с сокращением числа жертв. Сокращение популяции происходит до тех пор, пока число хищников не достигает величины $x_2 = \frac{a}{b} = 1,6$ (в этой точке $x_1' = 0$). С этого момента начинает расти популяция жертв. Через некоторое время пищи становится достаточно, чтобы обеспечить прирост хищников, обе популяции растут, и

процесс повторяется снова и снова. На графике четко виден периодический характер процесса. Количество жертв и хищников колеблется возле величин $x_1=2$ и $x_2=1,6$ соответственно. Периодичность процесса видна на фазовой плоскости: фазовая кривая $(x_1(t), x_2(t))$ – замкнутая линия. Самая левая точка этой кривой $x_2=1,6$ – точка, в которой число жертв достигает наименьшего значения. Самая правая точка $x_1=4$, $x_2=1,6$ – точка пика популяции жертв.

На языке дифференциальных уравнений это означает, что система имеет стационарное состояние $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, которое достигается в точке $x_1=2$ и $x_2=1,6$. Если в начальный момент система находилась в стационарной точке, то решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ не будут изменяться во времени, останутся постоянными. Всякое другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию решений. Неэллиптичность формы траектории, охватывающей центр, отражает негармонический характер колебаний.

Библиографический список

1. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биологии. – М.; Ижевск: РХД, 2002.
2. Курдюмов С.П., Князева Е.М. Законы эволюции и самоорганизации систем. – М.: Наука, 1994.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Н.Ю. Кудряшова, Е.С. Нагорнова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Рассмотрим линейное гиперсингулярное интегральное уравнение

$$a_1(t)x(t) + a_2(t)\bar{x}(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau + \frac{b_2(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{x}(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau + \\ + \int_{\gamma} h_1(t, \tau)x(\tau) d\tau + \int_{\gamma} h_2(t, \tau)\bar{x}(\tau) d\tau = f(t), t \in \gamma, \quad (1)$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат на комплексной плоскости. Будем предполагать, что $a_1(t), a_2(t), b_1(t), b_2(t), x(t), \bar{x}(t) \in H_{\alpha}$.

Применим к уравнению (1) преобразование Гильберта, введем новые обозначения: $a_m(e^{is}) = a_{m1}(s) + ia_{m2}(s)$, $b_m(e^{is}) = b_{m1}(s) + ib_{m2}(s)$, $h(e^{is}, e^{i\sigma}) = h_{m1}(s, \sigma) + ih_{m2}(s, \sigma)$, $m=1,2$, $x(e^{is}) = x_1(s) + ix_2(s)$, $x(e^{is}) = x_1(s) - ix_2(s)$. Приравнивая отдельно действительные и мнимые части в уравнении, получим:

$$\begin{cases} A_{11}(s)x_1(s) + A_{12}(s)x_2(s) + \frac{B_{11}(s)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x_1(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma + \frac{B_{12}(s)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x_2(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma + \\ + \int_0^{2\pi} H_{11}(s, \sigma)x_1(\sigma) d\sigma + \int_0^{2\pi} H_{12}(s, \sigma)x_2(\sigma) d\sigma = f_1(s), \\ A_{21}(s)x_1(s) + A_{22}(s)x_2(s) + \frac{B_{21}(s)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x_1(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma + \frac{B_{22}(s)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x_2(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma + \\ + \int_0^{2\pi} H_{21}(s, \sigma)x_1(\sigma) d\sigma + \int_0^{2\pi} H_{22}(s, \sigma)x_2(\sigma) d\sigma = f_2(s), \quad 0 \leq s \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2)$$

Построим вычислительную схему для приближенного решения системы уравнений (2). Выберем две системы узлов: $s_k = \frac{\pi k}{n}$,

$$s_k^* = \frac{\pi k}{n} + h, \quad 0 < h \leq \frac{\pi}{2n}, \quad k = 0, \dots, 2n-1.$$

Решение будем искать в виде полиномов

$$x_n^{(m)}(s) = \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k^{(m)} \psi_k(s), \quad m=1,2, \quad \text{где } \psi_k(s) = \begin{cases} 0, & s = s_j, \quad j \neq k, \\ 1, & s = s_k^*. \end{cases}$$

Для гиперсингулярного интеграла $\int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma$ построим две

квадратурные формулы:

$$\int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j-1, j+1}}^{2n-1} x(s_k) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d\sigma}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} + R_n^{(1)}; \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j-1, j+1}}^{2n-1} x(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d\sigma}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} + x(s_j^*) \int_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \frac{d\sigma}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} + R_n^{(2)}. \quad (4)$$

Заменим гиперсингулярные интегралы квадратурными формулами (3) и (4), регулярные – квадратурной формулой прямоугольников, применим к системе (2) метод коллокации по узлам $s_k^*, k = 0, \dots, 2n-1$. Получим СЛАУ:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^2 A_{1m}(s_j^*) x_m(s_j^*) + \frac{B_{11}(s_j^*)}{4\pi} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j-1, j+1}}^{2n-1} x_1(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma + \\ & + \frac{B_{12}(s_j^*)}{4\pi} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j-1, j+1}}^{2n-1} x_2(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma + \\ & + \frac{\pi}{n} \sum_{m=1}^2 \sum_{k=0}^{2n-1} H_{1m}(s_j^*, s_k^*) x_m(s_k^*) = f_1(s_j^*), \\ & \sum_{m=1}^2 A_{2m}(s_j^*) x_m(s_j^*) + \frac{B_{21}(s_j^*)}{4\pi} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j-1, j+1}}^{2n-1} x_1(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma + \\ & + \frac{B_{22}(s_j^*)}{4\pi} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j-1, j+1}}^{2n-1} x_2(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma + \\ & + \frac{\pi}{n} \sum_{m=1}^2 \sum_{k=0}^{2n-1} H_{2m}(s_j^*, s_k^*) x_m(s_k^*) = f_2(s_j^*). \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Пользуясь теоремой Адамара [3], нетрудно убедиться, что выбором параметра h можно добиться того, чтобы система (5) была однозначно разрешима. Справедливы оценки квадратурных формул (3) и (4):

$$|R_n^1| \leq \frac{A}{n^{\alpha-1}} \ln n, \quad |R_n^2| \leq \frac{A}{n^{\alpha-1}} \ln n.$$

Решение многочисленных модельных примеров доказало эффективность предложенного алгоритма. В табл. 1 приводятся результаты решения при $n=45$ по вычислительной схеме (5) интегрального уравнения

$$2x(t) + \bar{x}(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \frac{2}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{x}(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau = f(t), \quad t \in \gamma.$$

Точным решением уравнения являются функции $x_1(s) = \cos(s)$,
 $x_2(s) = \sin(s)$.

Таблица 1

s_j	Приближенное решение	Точное решение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность (%)
для функции $x_1(s)$				
0.66322	0.7890579	0.7880108	0.001047	0.13271015
1.15191	0.4089091	0.4067366	0.002172	0.53129099
2.54818	-0.8284529	-0.8290376	0.000584	0.07056848
3.31612	-0.9901184	-0.9848078	0.0053106	0.53636059
4.29351	-0.4019283	-0.4067366	0.0048082	1.19630763
5.96902	0.9517373	0.9510565	0.0006808	0.07153253
для функции $x_2(s)$				
0.66322	0.6172975	0.6156615	0.0016360	0.26502751
1.15191	0.9163211	0.9135455	0.0027756	0.30291103
2.54818	0.4391178	0.4383711	0.0007466	0.17004160
3.31612	-0.1737987	-0.1736482	0.0001505	0.08661796
4.29351	-0.9167520	-0.9135455	0.0032065	0.34977675
5.96902	-0.3097925	-0.3090170	0.0007754	0.25031761

Таблица 2

Зависимость максимальной абсолютной и относительной погрешностей от числа узлов

Число узлов	Максимальная абсолютная погрешность	Максимальная относительная погрешность (%)
25	0.0232656991	2.2780643928
35	0.0105197835	1.0420653411
45	0.0060826215	0.6049509853
55	0.0039832324	0.3969041477

Библиографический список

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978.
2. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус». – 1995. – 520 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

ДВУХУРОВНЕВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ГИБРИДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯМИ

Е.А. Лизина, В.Н. Щенников

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
г. Саранск, Россия

Рассматривается гибридная динамическая многосвязная система

$$\dot{x}_s = A_s x_s + b_s u_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^q A_{sj} x_j, \quad (1)$$

где $x_s \in R^{n_s}$, $x = (x_1^T, \dots, x_q^T)^T$; A_s , A_{sj} – постоянные матрицы размерности $n_s \times n_s$ и $n_s \times n_j$ соответственно; b_s – постоянный вектор-столбец размерности n_s ; $b_s = (b_{s1}, \dots, b_{sq})^T$; $s, j = \overline{1, q}$. Управление u_s зависит от дискретных моментов времени и представляет собой кусочно-постоянную функцию, т. е. $u_s(t) = u_s(ph)$, $t \in [ph; (p+1)h]$; $h > 0$ – некоторая постоянная, $p = 0, 1, 2, \dots$. Здесь управляющие воздействия формируются в виде суммы $u_s = u_s^\Lambda + u_s^\Gamma$, где u_s^Λ – управления на уровне подсистем (локальное управление); u_s^Γ – управление на уровне исходной системы (1) (глобальное управление). Пусть $u_s^\Lambda = k_s^T x_s(ph)$, $u_s^\Gamma = \sum_{j=1, j \neq s}^q k_{sj}^T x_j(ph)$, где $k_s^T = (k_{s1}, \dots, k_{sq})$ – постоянный вектор, $s = \overline{1, q}$. Одновременно вводятся управления $u_s = k_s^T x_s$, стабилизирующие систему

$$\dot{x}_s = (A_s + b_s k_s^T) x_s, \quad s = \overline{1, q}. \quad (2)$$

В качестве функции Ляпунова для системы (1) выбирается векторная функция $V(x) = (V_1(x_1), V_2(x_2), \dots, V_q(x_q))^T$, где $V_s(x_s) = x_s^T C_s x_s$, $s = \overline{1, q}$ – функции Ляпунова, решающие вопрос об асимптотической устойчивости систем (2) и удовлетворяющие условиям Н.Н. Красовского [1, гл. 3].

$$\lambda_{1s} \|x_s\|^2 \leq V_s(x_s) \leq \lambda_{2s} \|x_s\|^2, \left| \frac{V_s(x_s)}{\|x_s\|} \right| \leq c_s \|x_s\|, \quad (3)$$

$$\left. \frac{dV_s(x_s)}{dt} \right|_{(1)} \leq -d_s \|x_s\|^2, \quad s = \overline{1, q},$$

где λ_{1s} , λ_{2s} , c_s и d_s – положительные постоянные числа. Учитывая неравенства (3), известные оценки разностей

$$\|x - x(ph)\| \leq \frac{\alpha \|M\| \|X(ph)\|}{\beta + \varepsilon} \times (e^{(\beta + \varepsilon)(t - ph)} - 1) \leq \gamma h \|M\| \cdot \|X(ph)\|$$

и преобразования $\rho_s = V_s^{1/2}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_s}{dt} \leq & -\frac{d_s \rho_s}{2\lambda_{2s}^{1/2}} + \frac{c_s}{2\lambda_{1s}^{1/2}} \left(\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq s}}^q \frac{\mu_{sj}}{\lambda_j^{1/2}} \rho_j - \frac{\alpha b_s^T k_s^T \|M\| \|x_s(ph)\|}{\beta + \varepsilon} (e^{(\beta + \varepsilon)h} - 1) - \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq s}}^q b_s k_{sj}^T \frac{\alpha \|M\| \|x(ph)\|}{\beta + \varepsilon} (e^{(\beta + \varepsilon)h} - 1) \right), \quad s = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $M = \{\mu_{ij}\}_{i, j = \overline{1, q}}$, $0 < \frac{1}{2} \mu_s = \|A_s + b_s k_s^T\|$, $\mu_{sj} = \frac{1}{2} \|A_{sj} + b_s k_{sj}^T\|$, $\alpha(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$ не зависят от h ; $\beta = \max \operatorname{Re} \lambda_j(\tilde{A})$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \|A_1 + A_1^T\| & \|A_{1q}\| \\ & \ddots \\ A_{q1} & \|A_q + A_q^T\| \end{pmatrix}.$$

В векторно-матричной форме неравенства выглядят следующим образом:

$$\frac{d\rho}{dt} \leq \tilde{\tilde{A}} \rho + L(ph), \quad (5)$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{d_1}{2\lambda_{21}^{1/2}} & \frac{c_1\mu_{12}}{2\lambda_{11}^{1/2}\lambda_{12}^{1/2}} & \cdots & \frac{c_1\mu_{1q}}{2\lambda_{11}^{1/2}\lambda_{1q}^{1/2}} \\ \cdots & -\frac{d_2}{2\lambda_{22}^{1/2}} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{c_q\mu_{q1}}{2\lambda_{qq}^{1/2}\lambda_{q1}^{1/2}} & \cdots & \cdots & -\frac{d_q}{2\lambda_{2q}^{1/2}} \end{pmatrix}.$

Система сравнения для неравенства (5) имеет вид:

$$\frac{dv}{dt} = \tilde{A}v + L(ph). \quad (6)$$

Так как системы вида $\frac{dx_s}{dt} = A_s x_s + b_s u_s$, $s = \overline{1, q}$ управляемы, то за счет выбора коэффициентов усиления k_s^T ($s = \overline{1, q}$) всегда можно обеспечить ее асимптотическую устойчивость [2, гл. 1], причем с заранее заданными корнями характеристического уравнения. Для этого необходимо, чтобы матрица $\tilde{A}$ удовлетворяла условиям Севастьянова-Котелянского [3, с. 206]. Напомним, что $\mu_{sj} = \|A_{sj} + b_s k_{sj}^T\|$. Моделируя глобальное управление $u_s^T = \sum_{j=1, j \neq s}^q k_{sj}^T x_j(ph)$, можно добиться выполнения условий Севастьянова-Котелянского. Выберем коэффициенты усиления k_s^T , k_{sj}^T так, чтобы $\operatorname{Re} \lambda_j(\tilde{A}) < 0$, $s, j = \overline{1, q}$.

Общее решение в форме Коши системы (6) на промежутке $[ph; (p+1)h]$ имеет вид $\|\rho_s(t)\| \leq \|x_s(ph)\| \Omega + \Phi \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^q \|\nu_j(ph)\|$. Здесь

$$\Omega = \left(\lambda^* e^{(\beta_1 + \varepsilon_1)h} + \gamma(1 - e^{(\beta_1 + \varepsilon_1)h}) \right) \leq 1 - Eh \quad \text{и} \quad \Phi = \frac{\alpha\gamma}{\lambda^*(\beta_1 + \varepsilon_1)} (e^{(\beta_1 + \varepsilon_1)h} - 1) \leq Fh$$

при достаточно малом h ; $E = (E_1, \dots, E_q)^T$, $F = (F_1, \dots, F_q)^T$, $E_s > 0$, $F_s > 0$, $s = \overline{1, q}$ и не зависят от величины h . Используя теорему

сравнения [3, с. 190] и неравенства $\|x_s\| \leq \frac{\rho_s}{\lambda_{1s}^{1/2}}$, получим

$$\begin{aligned} \|x_s(t)\| &\leq \frac{(1-E_s h)}{\lambda^*} \|x_s(ph)\| + \frac{F_s h}{\lambda^*} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^q \|x_j(ph)\| \text{ или } \|x_s(t)\| \leq \\ &\leq w_{1s} \|x_s(0)\| + w_{2s} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^q \|x_j(0)\|, \text{ где } w_{1s} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1-E_s h}{\lambda^*} \right)^p, \\ w_{2s} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1-(E_s + F_s)h}{\lambda^*} \right)^p - \left(\frac{1-E_s h}{\lambda^*} \right)^p \right], s = \overline{1, q}. \end{aligned}$$

Пусть $w_s = \max_{1 \leq s \leq q} (w_{1s}, w_{2s})$, и выберем $\delta_s(\varepsilon) = \varepsilon / w_s$. Тогда для всех

$\|x_s(0)\| \leq \delta_s$ будет $\|x_s(t)\| \leq \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Таким образом, доказана

Теорема. Если выполняются следующие условия: 1) векторы $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ линейно независимы; 2) существуют коэффициенты усиления $k_s^T = (k_{s1}, \dots, k_{sq})$ ($s = \overline{1, q}$) такие, что $\operatorname{Re} \lambda_j(\tilde{A}) < 0$, то нулевое решение многосвязной управляемой гибридной динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями (2) при достаточно малом $h \leq h_0$ ($h_0 > 0$ – достаточно малое) будет асимптотически устойчивым.

Библиографический список

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматлит, 1959. – 22 с.
2. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
3. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука, 1985. – 352 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕСТКОСТИ ПРУЖИНЫ ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ

М.А. Захарова, А.М. Ахтямов

Уфимский государственный нефтяной технический университет,
Институт механики УМЦ РАН,
г. Уфа, Россия

В работе «Прочность, устойчивость, колебания» приведено уравнение продольно-изгибных колебаний стержня:

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{P}{EJ} \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{P}{EJ} \cdot \frac{d^2 y_0}{dz^2} + \frac{q}{EJ}, \quad (1)$$

где y ; y_0 – упругое и первоначальное смещение стержня; P – продольное усилие; q – интенсивность поперечной распределенной нагрузки.

Общие краевые условия в случае упругих закреплений записываются в виде:

$$\begin{cases} EJ y'''(0) + P y'(0) + k_1 y(0) = 0, \\ EJ y''(0) - k_2 y'(0) = 0, \\ EJ y'''(\ell) + P y'(\ell) - k_3 y(\ell) = 0, \\ EJ y'''(\ell) + k_4 y'(\ell) = 0. \end{cases} \quad (2) - (5)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 – коэффициенты жесткости пружины.

Рассмотрим задачу, обратную к задаче (1) – (5) (стационарный случай без колебаний – изгиб). Найдем коэффициенты жесткости пружин, присутствующих в краевых условиях, если известны прогибы стержня в четырех точках.

Решение уравнения (1) имеет вид:

$$y_1 = C_1 + C_2 z + C_3 \sin kz + C_4 \cos kz, \quad (6)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – числовые константы.

Если знаем прогибы в точках z_1, z_2, z_3, z_4 , то получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными вида:

$$y(z_i) = C_1 + C_2 z_i + C_3 \sin kz_i + C_4 \cos kz_i; \quad i = \overline{1; 4} \quad (7)$$

Решив систему (7), найдем C_i .

Зная их, можно записать решение уравнения (1) в любой точке отрезка $[0; \ell]$. Подставив полученное значение $y(x)$ в краевые условия (2) – (5), получим систему относительно коэффициентов k_i ; $i = \overline{1; 4}$.

Решение этой системы определяет коэффициенты жесткости k_i .

Рассмотрим решение задачи на двух примерах.

Пример 1. Известно, что $y(0) = y(\ell) = 0$; $y'(0) = y'(\ell) = 0$ – краевые условия. При этих условиях $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$; $k = \frac{2\pi}{\ell}$; $E = 2 \cdot 10^6$;

$J = 5 \cdot 10^{-2}$; $P = 134,3$; отрезок $[0; \ell]$; начального смещения y_0 нет; $q=0$.

При этих условиях решение системы (7) будет иметь вид $C_1 = C_2 = C_3 = 0$; C_4 – любое.

Пусть $C_4 = 0,05$. Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = 0,05 \sin kz.$$

Найдем прогибы в точках $z_1 = \frac{\ell}{12}$; $z_2 = \frac{\ell}{8}$; $z_3 = \frac{\ell}{6}$; $z_4 = \frac{\ell}{4}$.

Полученные значения $y(z)$ подставим в систему (2) – (5).

$$\begin{cases} EJ y'''(0) + k_1 y(0) = 0, \\ EJ y''(0) - k_2 y'(0) = 0, \\ EJ y'''(\ell) - k_3 y(\ell) = 0, \\ EJ y'''(\ell) + k_4 y'(\ell) = 0. \end{cases}$$

Откуда найдем k_i .

$$k_1 = -\frac{0,05k^3}{0}; \quad k_2 = 0; \quad k_3 = \frac{0,05k^3 \cos k\ell}{0,05 \sin k\ell} = k^3 \operatorname{ctg} k\ell;$$

$$k_4 = -\frac{0,05k^2 \sin k\ell}{0,05k \cos k\ell} = -k \cdot \operatorname{tg} k\ell,$$

при $k = \frac{2\pi}{\ell}$ имеем $k_1 = \infty$; $k_2 = 0$; $k_3 = \infty$; $k_4 = 0$. Эти условия определяют свободную опору.

Пример 2. Дан стержень длиной $\ell = 100$; $E = 2 \cdot 10^6$; $J = 5 \cdot 10^{-2}$;

$$P = 134,3; \quad k = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = 0,00366 \approx \frac{7\pi}{600}.$$

Общие краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} EJ y'''(0) + P y'(0) + y(0) = 0, \\ EJ y''(0) - 2y'(0) = 0, \\ EJ y'''(\ell) + P y'(\ell) - 3y(\ell) = 0, \\ EJ y'''(\ell) + 4y'(\ell) = 0. \end{cases} \quad (8) - (11)$$

Определим значения $y(z)$ на концах отрезка $[0; \ell]$. Решая эту систему, определим значение C_i : $C_1 = 4,0354C_4$; $C_2 = -0,0377C_4$; $C_3 = 2,308C_4$; C_4 – любое. Пусть $C_4 = 0,07$, тогда $C_1 = 0,2825$; $C_2 = -0,002639$; $C_3 = 0,1616$; $C_4 = 0,07$.

Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = 0,2825 - 0,002639z + 0,1616 \sin kz + 0,07 \cos kz. \quad (12)$$

Решим обратную задачу.

Зная прогибы в точках $z_1 = 20$; $z_2 = 40$; $z_3 = 60$; $z_4 = 80$.

Определим коэффициенты C_i , решая систему (7).

Эти значения $C_1=0,2825134$; $C_2 = -0,002638991$; $C_3 = 0,16162471$;
 $C_4 = 0,0700913$.

Решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = 0,2825 - 0,026387z + 0,1616 \sin kz + 0,07 \cos kz.$$

Из системы (2) – (5) имеем:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{-EJ y'''(0) - P y'(0)}{y(0)}, \\ k_2 = \frac{EJ y''(0)}{y'(0)}, \\ k_3 = \frac{EJ y'''(100) + P y'(100)}{y(100)}, \\ k_4 = \frac{-EJ y'''(100)}{y'(100)}. \end{cases}$$

Решая ее, нашли значения $k_1 = 1,001815603$; $k_2 = 1,9983451$;
 $k_3 = 3,000339521$; $k_4 = 4,1023812$.

Полученные значения соответствуют значениям k_i , находящимся в общих краевых условиях (8) – (11). Таким образом, обратная задача об определении коэффициентов жесткости пружин при продольно-поперечных колебаниях решена.

РЕШЕНИЕ ПЛАНОВОЙ ЗАДАЧИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА В ШИРОКОМ ОТВОДЯЩЕМ РУСЛЕ

В.Н. Коханенко, М.Ф. Мицик

Донской государственный аграрный университет,
 г. Новочеркасск,
 Южно-Российский государственный университет
 экономики и сервиса,
 г. Шахты, Россия

Уравнения движения двухмерного планового потока в плоскости годографа скорости описываются следующей системой [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{h_0}{2H_0} \frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{cases} \quad (1)$$

где h_0 – значение глубины потока в некоторой характерной точке при минимальном τ_0 ; $\varphi = \varphi(\tau; \theta)$ – потенциальная функция; $\psi = \psi(\tau; \theta)$ – функция тока; $\tau = V^2 / (2gH_0)$ – квадрат скоростного коэффициента потока; V – модуль вектора скорости; θ – угол между вектором скорости и осью симметрии потока в физической плоскости; H_0 – полный гидродинамический напор потока; g – ускорение силы тяжести.

Рассмотрим постановку задачи свободного растекания потока в плоскости годографа скорости. В [2] приводится общее решение уравнения (1) для функции тока:

$$\begin{aligned} \psi = & A_0 + B_0 \psi_{10}(\theta) + C_0 \psi_{20}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \sin k\theta + \right. \\ & + \left[B_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + B_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \cos k\theta \left. \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k^{*(1)} \psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \psi_{1k}^{*(2)} \right] \sin (2k-1)\theta + \right. \\ & + \left. \left[B_k^{*(1)} \psi_{1k}^{(1)} + B_k^{*(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \cos (2k-1)\theta \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для потоков, имеющих ось симметрии, функция тока вдоль оси должна быть равна нулю, так как эта линия тока отсекает от оси нулевой расход потока. Исходя из вида функции $\psi(\tau; \theta)$ в выражении (2), это условие будет выполняться в случае

$$A_0 = 0; B_0 = 0; C_0 = 0; B_k^{(1)} = B_k^{(2)} = B_k^{*(1)} = B_k^{*(2)} = 0, k = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, для функции тока достаточно выбрать следующее решение:

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \sin k\theta + \left[A_k^{*(1)} \psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \psi_{1k}^{*(2)} \right] \sin (2k-1)\theta \right\}. \quad (3)$$

Выражение (3) для выполнения условия постоянства расхода на крайней линии тока $\psi(\tau_0; 0) = V_0 b / 2$ необходимо дополнить слагаемым

$$M \sin \theta \cdot (\tau - \tau_0)^{-1/2} \cdot (1 - \tau)^\gamma, \quad (4)$$

где $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} (\tau - \tau_0)^{-1/2} \sin \theta = 1$ – условие вдоль линии тока в окрестности точки $(\tau = \tau_0; \theta = 0)$; M, γ постоянные, подлежащие определению.

Таким образом, исходное выражение для функции тока имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi = M \sin \theta \cdot (\tau - \tau_0)^{-1/2} \cdot (1 - \tau)^\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \sin k\theta + \right. \\ \left. + \left[A_k^{*(1)} \psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \psi_{1k}^{*(2)} \right] \sin (2k-1)\theta \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем соответствующее решение для потенциальной функции [2]

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0 + \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k^{(1)} \frac{d\psi_{1k}^{(1)}}{d\tau} + A_k^{(2)} \frac{d\psi_{1k}^{(2)}}{d\tau} \right] \cdot \int \sin k\theta d\theta + \\ + \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k^{*(1)} \frac{d\psi_{1k}^{*(1)}}{d\tau} + A_k^{*(2)} \frac{d\psi_{1k}^{*(2)}}{d\tau} \right] \cdot \int \sin (2k-1)\theta d\theta + \\ + \frac{2h_0 M}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(1-\tau)^\gamma}{(\tau - \tau_0)^{1/2}} \right] \cdot \int \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь с учетом (4) из выражения (5) следует:

$$\psi(\tau_0; 0) = V_0 b / 2 = M (1 - \tau_0)^\gamma.$$

Будем полагать, что $\gamma = 11$, тогда определим постоянную

$$M = V_0 b / \left(2(1 - \tau_0)^\gamma \right). \quad (7)$$

Из условия $\theta = \theta_{\max}$ вдоль граничной линии тока на бесконечности, т.е. при $\tau = 1$, следует:

$$\begin{aligned} V_0 b / 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)} \right] \sin k\theta_{\max} + \right. \\ \left. + \left[A_k^{*(1)} \psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \psi_{1k}^{*(2)} \right] \sin (2k-1)\theta_{\max} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Задачей свободного растекания потока в плоскости годографа скорости является определение постоянных $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, A_k^{*(1)}, A_k^{*(2)}$ в выражениях для потенциальной функции и функции тока:

$$\psi = \psi(\tau; \theta; A_k^{(1)}; A_k^{(2)}; A_k^{*(1)}; A_k^{*(2)}); \quad \varphi = \varphi(\tau; \theta; A_k^{(1)}; A_k^{(2)}; A_k^{*(1)}; A_k^{*(2)}). \quad (9)$$

Рассмотрим вначале самый простой случай решения задачи при $k=1$ и выборе решения (первое слагаемое в ряде (5) для простоты опускаем):

$$\psi = A \cdot \tau^{-1/2} \sin \theta. \quad (10)$$

В этом случае исследования проводим вдоль крайней линии тока, начиная не с точки $(\tau = \tau_0; \theta = 0)$, а с разрыва параметров течения на выходе из трубы, т.е. с точки $K (\tau = \tau_K; \theta = \theta_K)$ (рис. 1).

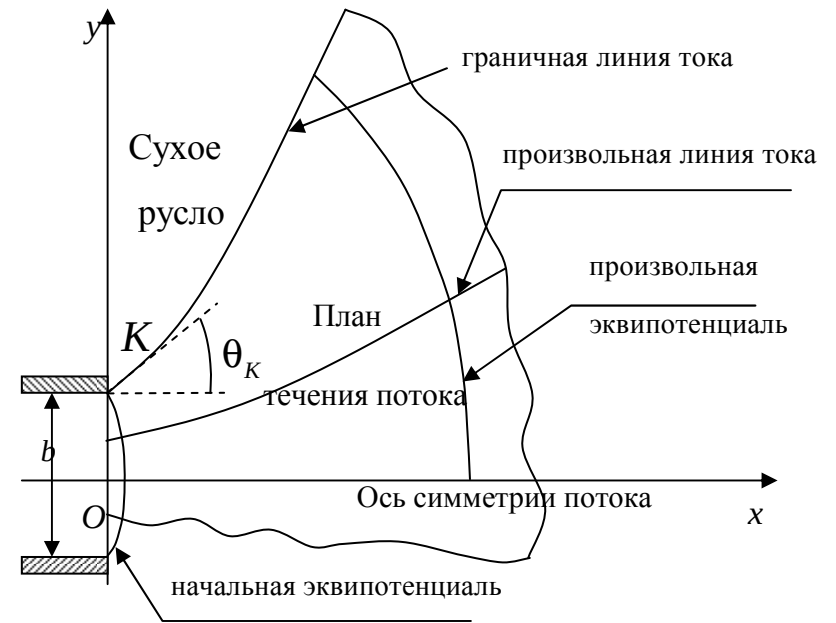


Рис. 1. План растекания потока с разрывом параметров на выходе из трубы

При $\gamma = 11$ в решении (5) в пределе выполняется условие

$$\psi(\tau_0; 0) = V_0 b / 2,$$

и практически возможен на малом расстоянии по «х»: $x/b < 0,1$ рост угла θ от нуля до конечного θ_K , поэтому выбор решения в виде (10) оправдан. Вид решения (10) имеет следующее обоснование:

при $0 < \theta < \pi/2$ функция $f_1(\theta) = \sin \theta$ – монотонно возрастающая;

$f_2(\tau) = \tau^{-1/2}$ также монотонно возрастает при $\tau_K \leq \tau < 1$.

Таким образом, отношение этих функций может быть постоянным при изменении самих аргументов τ и θ .

Постоянная A определяется из условия

$$V_0 b / 2 = A \sin \theta_{\max}. \quad (11)$$

В случае, когда число постоянных $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, A_k^{*(1)}, A_k^{*(2)}$ в выражениях (9) равно двум, возможны варианты:

$$\psi = [A_1 f_1(\tau) + A_2 f_2(\tau)] \sin \theta, \quad (12)$$

или $\psi = A_1 f_1^*(\tau) \sin \theta + A_2 f_2^*(\tau) \sin 4\theta$.

Рассмотрим вначале вариант (12). В этом случае имеем:

$$\psi = A_1 \tau^{-1/2} \sin \theta + A_2 \tau^{1/2} (1 - \tau/2) \sin \theta. \quad (13)$$

Вдоль крайней линии тока при $\tau = 1, \theta = \theta_{\max}$, поэтому из (13) следует:

$$\psi = V_0 b / 2 = [A_1 + A_2 / 2] \cdot \sin \theta_{\max}, \quad (14)$$

$$\text{отсюда} \quad A_1 + A_2 / 2 = V_0 b / (2 \sin \theta_{\max}). \quad (15)$$

Будем полагать, что коэффициенты $A_1, A_2 \geq 0$. Считаем функцию

$$\theta = \arcsin \left\{ \frac{V_0 b \cdot K_T}{2 [A_1 \tau^{-1/2} + A_2 \tau^{1/2} (1 - \tau/2)]} \right\} \quad (16)$$

для произвольной линии тока, соответствующую коэффициенту расхода « K_T », монотонно возрастающей и доставляющей максимум при любых τ из области изменения $[\tau_0; 1]$.

Определим значения коэффициентов A_1 и A_2 из условий оптимальности функции (16) при каждом τ . Нетрудно видеть, что максимальное значение для угла θ достигается в том случае, когда функция

$$f(\tau) = A_1 \tau^{-1/2} + A_2 \tau^{1/2} (2 - \tau) \quad (17)$$

достигает наименьшего значения при каждом τ и убывает по τ .

Для каждого фиксированного τ поиск минимума функции (17) при ограничении (15) и неотрицательности коэффициентов является задачей линейного программирования. Как известно [3], ее оптимальное решение достигается на границе множества допустимых решений (рис. 2).

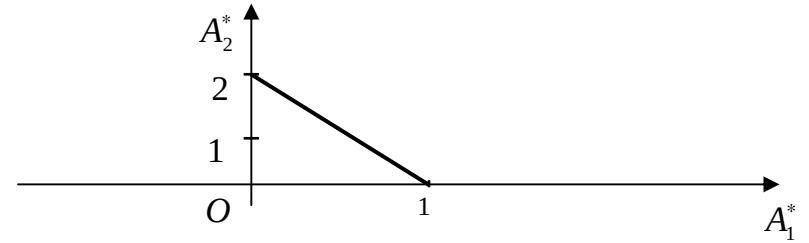


Рис. 2. Область изменения параметров A_1^* и A_2^* в задаче линейного программирования

Таким образом, наименьшее значение функции (17) следует отыскивать среди значений функций по τ на отрезке $[\tau_0; 1]$:

$$f_1(\tau) = \tau^{-1/2} \text{ и } f_2(\tau) = \tau^{1/2}(2 - \tau). \quad (18)$$

Сравним поведение этих функций по τ на отрезке $[1/3; 1]$. Их графики, построенные в Maple 9.5, приведены на рис. 3; нетрудно видеть, что функция

$$f_1(\tau) > f_2(\tau) \text{ при } 1/3 < \tau < 1. \quad (19)$$

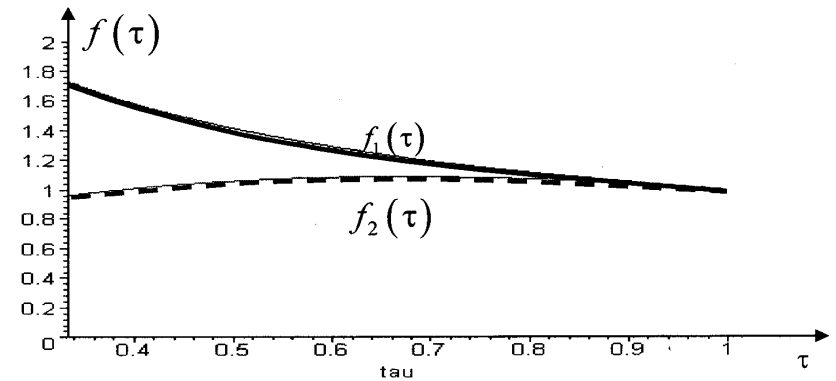


Рис. 3. Поведение функций $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$

Функция $f_1(\tau)$ монотонно убывает на $[1/3, 1]$. Производная второй функции

$$f_2'(\tau) = (\tau^{1/2}(2 - \tau))' = (2 - 3\tau)/(2\tau^{1/2}), \quad (20)$$

поэтому функция $f_2(\tau)$ монотонно возрастает при $1/3 < \tau < 2/3$ и монотонно убывает при $2/3 < \tau < 1$.

I. Если $\tau_0 \in (1/3; 2/3)$, функция $f_2(\tau)$ не удовлетворяет условию монотонности на $[\tau_0; 1]$, и минимум целевой функции $f(\tau)$ достигается при

$$A_1 = V_0 b / (2 \sin \theta_{\max}), \quad A_2 = 0. \quad (21)$$

Угол растекания потока для произвольной линии тока в этом случае определяется по формуле

$$\theta = \arcsin \{ \tau^{1/2} \cdot K_T \cdot \sin \theta_{\max} \}. \quad (22)$$

II. Если же $\tau_0 \in (2/3; 1)$, то $f_2(\tau)$ является монотонной на $[\tau_0; 1]$, и минимум для $f(\tau)$ достигается при

$$A_1 = 0, \quad A_2 = V_0 b / \sin \theta_{\max}. \quad (23)$$

Здесь угол растекания потока для произвольной линии тока определяется по формуле

$$\theta = \arcsin \{ K_T \cdot \sin \theta_{\max} / (\tau^{1/2} (2 - \tau)) \}. \quad (24)$$

В случае если $\psi = A_1 f_1(\tau) \sin \theta + A_2 f_2(\tau) \sin 4\theta$, то исходя из спектра решений уравнения (1) имеем:

$$\psi = A_1 \tau^{-1/2} \sin \theta + A_2 \tau^2 (1 - \tau)^2 \sin 4\theta. \quad (25)$$

При $\tau = 1$, $\theta = \theta_{\max}$ из (25) следует:

$$A_1 = V_0 b / (2 \sin \theta_{\max}), \quad (26)$$

тогда для крайней линии тока справедливо равенство

$$\frac{V_0 b}{2} = \frac{V_0 b}{2 \sin \theta_{\max}} \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} + A_2 \tau^2 (1 - \tau)^2 \sin 4\theta, \quad (27)$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно угла $\theta = \theta(\tau; A_2)$. Исследования показывают, что функция $\theta = \theta(\tau; A_2)$ будет монотонной и будет иметь максимум только при $A_2 = 0$, т.е. возвращаемся к варианту (21).

Результаты моделирования сравнивались с результатами экспериментов. Это сравнение позволило сформулировать следующее утверждение: найденные постоянные (21) и (23) в первом выражении (9) составляют максимум функции

$$\theta = f\left(\tau; A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, A_k^{*(1)}, A_k^{*(2)}\right) \quad (28)$$

для соответствующих значений « τ », $\tau \in [\tau_0; 1]$, при этом функция (28) является монотонно возрастающей по τ и удовлетворяет условию

$$\theta_{\max} = f\left(1; M; A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, A_k^{*(1)}, A_k^{*(2)}\right), k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Высокую степень адекватности по параметрам потока в окрестности выхода потока из трубы до расширения потока $\beta = B/b = 3 \dots 7$ дает модель по формуле (13) с постоянными (21):

$$\psi = \frac{V_0 b}{2 \sin \theta_{\max}} \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} \text{ при } \tau_0 < \frac{2}{3}, \text{ т.е. } Fr_0 < 4, \quad (30)$$

или модель (13) с постоянными (23):

$$\psi = \frac{V_0 b}{\sin \theta_{\max}} \tau^{1/2} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) \sin \theta \text{ при } \tau_0 \geq \frac{2}{3}, Fr_0 \geq 4. \quad (31)$$

Последующее решение задачи в физической плоскости сводится к использованию системы (1) с учетом того, что вдоль каждой линии тока $d\psi \equiv 0$, а вдоль эквипотенциали $d\phi \equiv 0$ и интегрированию получаемых уравнений. Для случая (21) выражение для потенциальной функции:

$$\phi = A \frac{h_0}{H_0} \frac{\cos \theta}{\tau^{1/2} (1 - \tau)}. \quad (32)$$

При известных значениях постоянных A_1, A_2 в случае I задача по определению параметров потока в точке пересечения произвольной линии тока с произвольной эквипотенциалью сводится к поиску решений системы

$$\begin{cases} \frac{\cos \theta}{\tau^{1/2} (1 - \tau)} = \frac{1}{\tau_A^{1/2} (1 - \tau_A)}; \\ \frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} = K_T \sin \theta_{\max}, \end{cases} \quad (33)$$

где A – произвольная точка оси симметрии потока, через которую проходит эквипотенциаль.

В заключение приведем без вывода решение системы (33) τ^*, θ^* .

$$\tau^* = \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{1-3M_1}}{3} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \frac{27M_2/2 - 1 - 9M_1}{\sqrt{(1-3M_1)^3}} \right);$$

$$\theta^* = \arcsin \left(K_T \sqrt{\tau^*} \sin \theta_{\max} \right),$$

где $M_1 = \tau_0 (1 - \tau_0)^2 \cdot K_T^2 \sin^2 \theta_{\max}$; $M_2 = \tau_0 (1 - \tau_0)^2$.

Для оценки степени адекватности потока приведем результаты сравнения экспериментальных исследований с модельными (по методу авторов и известных исследователей).

Параметры потока на выходе из трубы

$$b = 16 \text{ см}; V_0 = 148 \frac{\text{см}}{\text{с}}; h_0 = 9,27 \text{ см}; Fr_0 = 2,397.$$

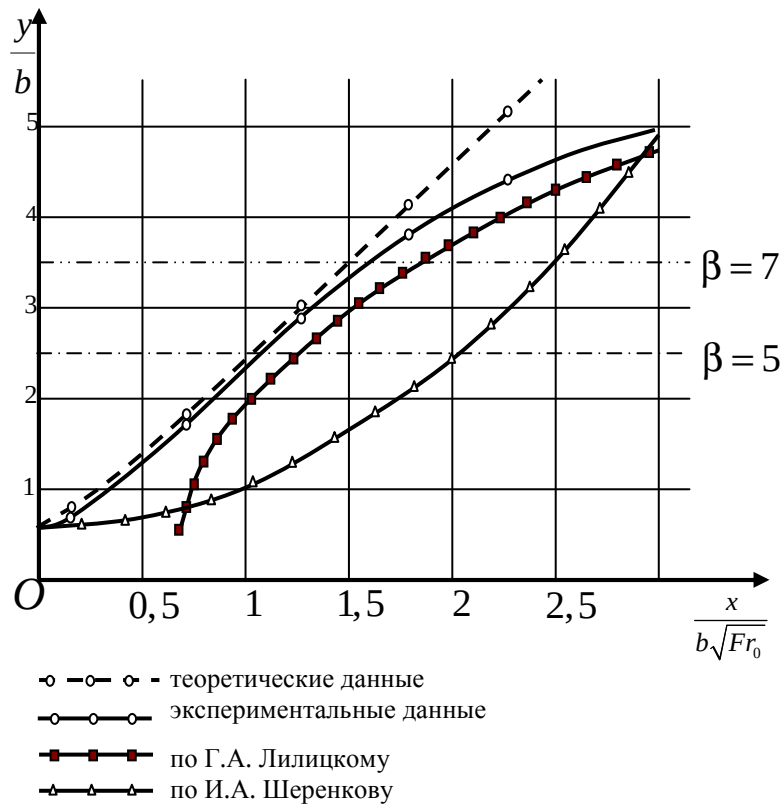


Рис. 4. Графики сравнения экспериментальной линии тока с полученными по методам авторов, Шеренкова и Лилицкого

Из результатов сравнения рассогласования ординат крайней линии тока в теории и эксперименте видно, что при относительном расширении $\beta = 3...7$ погрешность не превышает 10%, при этом рассогласование эксперимента с кривой по И.А. Шеренкову превышает 100%.

Вывод по работе:
пользуясь основными свойствами бурных потоков, авторы получили модели растекания потока при $1 < Fr_0 < 4$ и $Fr_0 \geq 4$. В точке $Fr_0 = 4$ алгоритм поиска параметров потока изменяется.

Библиографический список

1. Коханенко В.Н. Моделирование одномерных и двумерных открытых водных потоков: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, В.В. Ширяев, Н.В. Коханенко; под общей ред. В.Н. Коханенко. – Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2007. – 168 с.
2. Ширяев В.В. Развитие теории двумерных открытых водных потоков: монография / В.В. Ширяев, М.Ф. Мицик, Е.В. Дуванская; под общей ред. В.В. Ширяева. – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 133 с.
3. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

ОСОБЕННОСТИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА ЗА БЕЗНАПОРНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

В.Н. Коханенко, М.Ф. Мицик

Донской государственный аграрный университет,
г. Новочеркасск,

Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса,
г. Шахты, Россия

Определение параметров свободного растекания потока в широкое отводящее русло имеет важное прикладное значение для проектирования сооружений дорожного водоотвода. При этом полагают дно отводящего русла горизонтальным, а поток двумерным в плане. В работах [1, 2] показано, что силами сопротивления потоку в области крепления отводящего русла можно пренебречь, поэтому дополнительно полагаем поток потенциальным и стационарным.

Рассмотрим схему течения потока в плане.

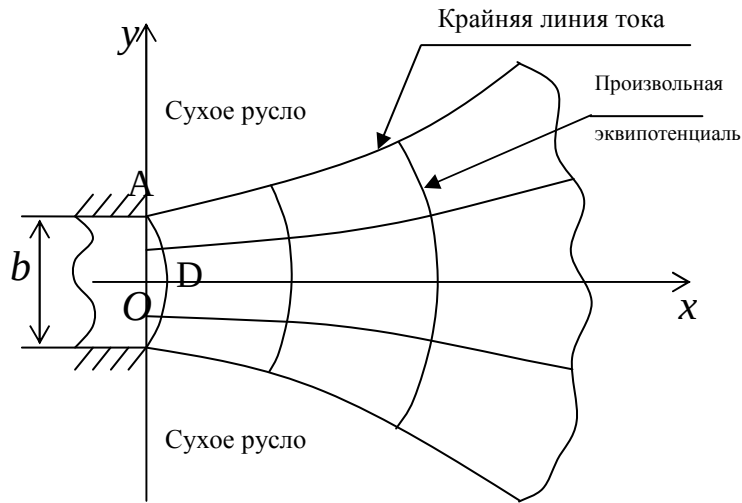


Рис. 1. План растекания потока в терминах линия тока, эквипотенциаль

Для постановки задачи в физической плоскости течения сформулируем свойства бурного потока. Известны параметры h_0, V_0, b на выходе потока из прямоугольного безнапорного отверстия в широкое отводящее русло:

h_0 — глубина потока; V_0 — модуль вектора скорости; b — ширина выходного отверстия.

Согласно [3], при свободном растекании бурного потока глубины монотонно уменьшаются вниз по течению, а скорости увеличиваются согласно уравнению Бернулли для двумерного в плане потока:

$$H_0 = V^2 / (2g) + h, \quad (1)$$

где постоянная H_0 определяется по параметрам V_0, h_0 .

Из этой же работы известен метод определения максимального угла растекания потока на бесконечности вдоль крайней линии тока $\theta_{\max}$. Однако условия распределения глубин потока вдоль крайних линий тока и сама геометрия этих линий заранее неизвестны и определяются в процессе решения задачи. Известно лишь, что $h \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. В [4] приведены формулировки оптимального растекания потока в поперечном направлении.

Перейдем от физической плоскости течения потока к использованию уравнений движения потока в плоскости годографа скорости [5,6,7]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{h_0}{2H_0} \frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{cases} \quad (2)$$

где φ — потенциальная функция; ψ — функция тока; θ — угол между вектором скорости жидкой частицы потока и осью OX; $\tau = V^2 / (2gH_0)$ — нормированный модуль вектора скорости.

Эта система уравнений имеет широкий спектр аналитических решений, из которых в [4] выделены следующие:

$$\begin{aligned} \text{для функции тока} - \psi_1 &= A_1 \tau^{-1/2} \sin \theta; \quad \psi_2 = A_2 \tau^{1/2} (1-\tau/2) \sin \theta; \\ \text{для эквипотенциали} - \varphi_1 &= A_1 \frac{\cos \theta}{\tau^{1/2} (1-\tau)}; \quad \varphi_2 = A_2 \frac{\tau^{1/2} (3\tau-2) \cos \theta}{2(1-\tau)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Выражение для крайней линии тока при этом запишется в виде:

$$\psi_1 = A_1 \tau^{-1/2} \sin \theta + A_2 \tau^{1/2} (1-\tau/2) \sin \theta = V_0 b / 2. \quad (4)$$

Для произвольной эквипотенциали получим:

$$\varphi = A_1 \frac{\cos \theta}{\tau^{1/2} (1-\tau)} + A_2 \frac{\tau^{1/2} (3\tau-2) \cos \theta}{2(1-\tau)} = \text{const} \quad (5)$$

Из условия того, что на бесконечности, т.е. при $\tau \rightarrow 1$ угол $\theta \rightarrow \theta_{\max}$, уравнение (4) обращается в уравнение относительно постоянных A_1 и A_2 :

$$A_1 + \frac{A_2}{2} = \frac{V_0 b}{2 \sin \theta_{\max}}, \quad (6)$$

где $\theta_{\max}$ — угол растекания потока при $X \rightarrow \infty$ вдоль крайней линии тока.

Угол $\theta_{\max}$ определяется по известным формулам для плановых потоков из теории на основе метода характеристик потока [3]:

$$\theta_{\max} = C_1 + (\sqrt{3} - 1)\pi/2 ,$$

где $C_1 = \arctg \sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{1 - \tau_0}} - \sqrt{3} \arctg \sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{3 \cdot (1 - \tau_0)}} .$

Из уравнения (4) определим угол « θ »:

$$\theta = \arcsin \left[\frac{V_0 b}{2A_1 \tau^{-1/2} + A_2 \tau^{1/2} (2 - \tau)} \right]. \quad (7)$$

Потребуем далее, чтобы выполнялось условие (6) и при каждом « τ » угол « θ » был максимальным при допустимых вариациях коэффициентов A_1 и A_2 , т.е. решим задачу линейного программирования для функции (7) для неотрицательных переменных A_1 и A_2 при ограничении (6).

Дополнительно проверим монотонность угла « θ » в зависимости от параметра « τ » при изменении его значений от τ_0 до 1.

Авторами была составлена программа поиска констант A_1, A_2 , и были сделаны следующие выводы:

при $1/3 < \tau_0 < 2/3$ (соответственно число Фруда $1 < Fr_0 < 4$) решением задачи для функции тока является зависимость

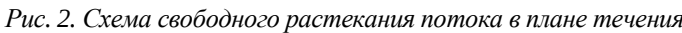
$$\psi = A_1 \tau^{-1/2} \sin \theta = V_0 b / 2; \quad (8)$$

при $2/3 \leq \tau_0 < 1, Fr_0 \geq 4$ решением задачи является

$$\psi = A_2 \tau^{1/2} (1 - \tau/2) \sin \theta = V_0 b / 2. \quad (9)$$

В работе [8], исходя из зависимости (8), была решена задача определения всего спектра параметров потока и проведено сопоставление модели с экспериментом, которая в большинстве случаев дает высокую степень адекватности при условии $1 < Fr_0 < 4$.

При $Fr_0 \geq 4$ адекватность модели (8) существенно ухудшается.

$$\varphi = A_2 \frac{\tau^{1/2} (3\tau - 2) \cos \theta}{2(1 - \tau)}. \quad (10)$$
$$\tau^{1/2} (2 - \tau) \sin \theta = \sin \theta_{\max}. \quad (11)$$
$$\frac{\tau^{1/2}(3\tau-2)\cos\theta}{(1-\tau)} = \frac{\tau_A^{1/2}(3\tau_A-2)\cos\theta_A}{(1-\tau_A)}. \quad (12)$$


В качестве нулевой эквипотенциали выберем дугу окружности радиуса R , центр которой располагается на оси OX , а направление радиуса R в каждой точке начальной эквипотенциали равно θ (рис.2).

Сопряжение потоков I и II выполним по нулевой эквипотенциали. Так как поток I равномерный, то вдоль нулевой эквипотенциали $\tau = \tau_0$.

Из геометрии рис. 2 заметим, что

$$x_D = \frac{b(1 - \cos \theta_A)}{2 \sin \theta_A} = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_A}{2}. \quad (13)$$

Параметры потока τ_A, θ_A определяются как решение системы

$$\begin{cases} \tau_A^{1/2} (2 - \tau_A) \sin \theta_A = \sin \theta_{\max}; \\ \frac{\tau_A^{1/2} (3\tau_A - 2) \cos \theta_A}{(1 - \tau_A)} = \frac{\tau_0^{1/2} (3\tau_0 - 2)}{(1 - \tau_0)}, \end{cases} \quad (14)$$

при этом значение параметра τ_A является корнем уравнения пятой степени:

$$(3\tau_A - 2)^2 \left(\tau_A - \frac{\sin^2 \theta_{\max}}{(2 - \tau_A)^2} \right) = \frac{\tau_0 (3\tau_0 - 2)^2}{(1 - \tau_0)^2} (1 - \tau_A)^2. \quad (15)$$

Можно показать, что уравнение (15) имеет единственное решение при $\tau_0 < \tau_A < 1$. Острый угол θ_A определяется выражением

$$\theta_A = \arcsin \frac{\sin \theta_{\max}}{\tau_A^{1/2} (2 - \tau_A)}. \quad (16)$$

При предложенном методе сопряжения потоков I и II определяются следующие параметры: $R, \tau_A, \theta_A, \tau_D, x_D$.

Это новый элемент в расчете параметров свободно растекающегося бурного потока за прямоугольной трубой в широкое неограниченное русло. Из этой модели сопряжения следует, что по оси симметрии потока от точки O до точки D параметры потока не изменяются.

Определим параметры потока в произвольной точке плана течения.

Воспользуемся уравнением связи между планом течения потока и плоскостью годографа скорости [5]:

$$dx + i dy = \left(d\varphi + i \frac{h_0}{h} d\psi \right) \frac{1}{V} e^{i\theta}. \quad (17)$$

Подставим в (17) вместо Φ и Ψ выражения (9) и (10) и учтем зависимости

$$h = H_0 (1 - \tau); \quad V = \tau^{1/2} \sqrt{2gH_0},$$

сравнивая действительную и мнимую части в (17); получим:

$$\begin{cases} dx = \frac{A_2 h_0 \cos \theta}{2H_0 \sqrt{2gH_0} \tau^{1/2}} \left[\frac{(3\tau-1)(2-\tau) \cos \theta}{2\tau^{1/2} (1-\tau)^2} d\tau - \frac{(3\tau-2) \tau^{1/2} \sin \theta}{(1-\tau)} d\theta \right]; \\ dy = \frac{A_2 h_0 \sin \theta}{2H_0 \sqrt{2gH_0} \tau^{1/2}} \left[\frac{(3\tau-1)(2-\tau) \cos \theta}{2\tau^{1/2} (1-\tau)^2} d\tau - \frac{(3\tau-2) \tau^{1/2} \sin \theta}{(1-\tau)} d\theta \right]. \end{cases} \quad (18)$$

Вдоль крайней линии тока справедлива зависимость (11), тогда

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{\max}}{\tau(2-\tau)^2}}. \quad (19)$$

Так как вдоль крайней линии тока $d\psi = 0$, то из (11) следует:

$$\cos \theta d\theta = \frac{(3\tau-2) \sin \theta d\tau}{2\tau(2-\tau)}. \quad (20)$$

Уравнение (20) с учетом зависимости (11) примет вид:

$$\cos \theta d\theta = \frac{(3\tau-2) \sin \theta d\tau}{2\tau^{3/2} (2-\tau)^2}. \quad (21)$$

Далее с учетом (11), (19), (21) система (18) преобразуется:

$$\begin{cases} dx = \frac{A_2 h_0}{2H_0 \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{(3\tau-1)(2-\tau)}{2\tau(1-\tau)^2} - \frac{(4-3\tau) \sin^2 \theta_{\max}}{(1-\tau)^2 (2-\tau)^3} \right] d\tau; \\ dy = \frac{A_2 h_0 \sin \theta_{\max}}{2H_0 \sqrt{2gH_0} \sqrt{\tau - \frac{\sin^2 \theta_{\max}}{(2-\tau)^2}}} \left[\frac{(3\tau-1)}{2\tau(1-\tau)^2} - \frac{(4-3\tau) \sin^2 \theta_{\max}}{(1-\tau)^2 (2-\tau)^4} \right] d\tau. \end{cases} \quad (22)$$

Интегрируя зависимости (22), получим уравнения крайней линии тока:

$$\begin{cases} x = \frac{A_2 h_0}{2\sqrt{2gH_0^3}} \left[\frac{(\tau - \tau_A)}{(1-\tau)(1-\tau_A)} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tau_A^2 (1-\tau_A)}{\tau^2 (1-\tau)} - \frac{\sin^2 \theta_{\max}}{(1-\tau)(2-\tau)^2} \right]_{\tau_A}^{\tau}; \\ y = \frac{b}{2} + \frac{A_2 h_0 \sin \theta_{\max}}{2\sqrt{2gH_0^3}} \int_{\tau_A}^{\tau} \left[\frac{(3\tau-1)}{2\tau(1-\tau)^2} - \frac{(4-3\tau)\sin^2 \theta_{\max}}{(1-\tau)^2 (2-\tau)^4} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - \frac{\sin^2 \theta_{\max}}{(2-\tau)^2}}}. \end{cases} \quad (23)$$

По формулам (23) для произвольной точки С (см. рис. 2) крайней линии тока с параметрами τ_C и θ_C определяются ее координаты. Для определения значений параметров в точке С воспользуемся системой уравнений

$$\begin{cases} \tau_C^2 (2 - \tau_C) \sin \theta_C = \sin \theta_{\max}; \\ \frac{\tau_C^2 (3\tau_C - 2) \cos \theta_C}{(1 - \tau_C)} = \frac{\tau_K^2 (3\tau_K - 2)}{(1 - \tau_K)}. \end{cases} \quad (24)$$

Из формулы (18) легко найти выражение для « dx » на оси потока

$$dx = \frac{A_2 h_0 (3\tau - 1)(2 - \tau) d\tau}{4H_0 \sqrt{2gH_0} \tau (1 - \tau)^2}. \quad (25)$$

Интегрируя (25), находим абсциссу X_K по формуле

$$X_K = x_D + \frac{A_2 h_0}{2\sqrt{2gH_0^3}} \left[\frac{2(\tau - \tau_K)}{(1-\tau)(1-\tau_K)} + \ln \frac{\tau_K^2 (1-\tau_K)}{\tau^2 (1-\tau)} \right]. \quad (26)$$

Таким образом, по заданному X_K из (26) определяется значение

τ_K , далее из системы (24) определяются параметры τ_C и θ_C , а из (23) – координаты точки $C(x_C; y_C)$. Зная значение τ_C , можно определить величину скорости и глубину потока: $h_C = H_0 (1 - \tau_C)$; $V_C = \tau_C^{1/2} \sqrt{2gH_0}$.

Определим теперь параметры потока τ_M и θ_M в произвольной точке потока $M(x_M; y_M)$. Пусть точка М находится на пересечении

выделенной линии тока и эквипотенциали, проходящей через точку К (рис. 2). Крайняя линия тока отсекает от оси симметрии потока ОХ 50% общего расхода воды через трубу, т.е. $0,5Q$. Соответственно линия тока, проходящая через точку Т, отсекает от оси симметрии поток расходом

$$Q_T = 0,5 \cdot Q \cdot K_T, \quad (27)$$

где $K_T = \sin \theta_{\max}^T / \sin \theta_{\max}$.

Итак, если задан коэффициент расхода $0 \leq K_T \leq 1$, то он однозначно

фиксирует линию тока. Из уравнения (27) определяется угол $\theta_{\max}^T$:

$$\theta_{\max}^T = \arcsin(K_T \sin \theta_{\max}). \quad (28)$$

Параметры τ_T, θ_T в точке Т определяются решением системы

$$\begin{cases} \tau_T^{\frac{1}{2}} (2 - \tau_T) \sin \theta_T = \sin \theta_{\max}; \\ \frac{\tau_T^{\frac{1}{2}} (3\tau_T - 2) \cos \theta_T}{(1 - \tau_T)} = \frac{\tau_0^{\frac{1}{2}} (3\tau_0 - 2)}{(1 - \tau_0)}. \end{cases} \quad (29)$$

При этом определяем решение системы (29), пользуясь условием

$$\tau_0 < \tau_T < \tau_A.$$

Координаты точки Т определим из системы

$$\begin{cases} x_T = R \cos \theta_T - R \cos \theta_A; \\ y_T = R \sin \theta_T. \end{cases} \quad (30)$$

Заметим также, что выделенная линия тока пройдет через точку $E(0; K_T b/2)$. Фиксацию произвольной эквипотенциали, проходящей

через точку Е, задаем глубиной $h_E = \delta h_0$, где $0 < \delta < 1$. По глубине

h_E определим

$$\tau_E = 1 - h_E / H_0. \quad (31)$$

Тогда скорость потока в точке Е вычисляется по формуле

$$V_E = \tau_E^{1/2} \sqrt{2gH_0}. \quad (32)$$

Так как точка М находится на пересечении линии тока, проходящей через точку Т, и эквипотенциали, проходящей через точку Е, то ее координаты удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \tau_M^{1/2} (2 - \tau_M) \sin \theta_M = K_T \sin \theta_{\max}; \\ \frac{\tau_M^{1/2} (3\tau_M - 2) \cos \theta_M}{(1 - \tau_M)} = \frac{\tau_K^{1/2} (3\tau_K - 2)}{(1 - \tau_K)}. \end{cases} \quad (33)$$

Далее по найденным параметрам τ_M и θ_M при известных координатах точки Т определим координаты точки М из системы дифференциальных уравнений для линии тока (22) для случая произвольной линии тока. Из второго уравнения системы (22) интегрированием вдоль линии тока от точки Т до точки М находим:

$$y = y_T + \frac{A_2 h_0 K_T \sin \theta_{\max}}{2\sqrt{2gH_0^3}} \int_{\tau_T}^{\tau_M} \left[\frac{(3\tau - 1)}{2\tau(1 - \tau)^2} - \frac{(4 - 3\tau) K_T^2 \sin^2 \theta_{\max}}{(1 - \tau)^2 (2 - \tau)^4} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - \frac{K_T^2 \sin^2 \theta_{\max}}{(2 - \tau)^2}}}. \quad (34)$$

Преобразуя первое из уравнений системы (22), получим:

$$dx = \frac{A_2 h_0}{2H_0 \sqrt{2gH_0}} \left[\frac{(3\tau - 1)(2 - \tau)}{2\tau(1 - \tau)^2} - \frac{(4 - 3\tau) K_T^2 \sin^2 \theta_{\max}}{(1 - \tau)^2 (2 - \tau)^3} \right] d\tau. \quad (35)$$

Интегрируя теперь уравнение (35), определим абсциссу точки М:

$$x = \frac{A_2 h_0}{2\sqrt{2gH_0^3}} \left[\frac{(\tau_M - \tau_T)}{(1 - \tau_M)(1 - \tau_T)} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tau_T^2 (1 - \tau_T)}{\tau_M^2 (1 - \tau_M)} - \frac{K_T^2 \sin^2 \theta_{\max}}{(1 - \tau)(2 - \tau)^2} \Big|_{\tau_T}^{\tau_M} \right]. \quad (36)$$

Таким образом, по формулам в разделах (34), (36) можно, зная исходные данные для расчета V_0, h_0, b, K_T , определить любые параметры потока в области его растекания: геометрическую форму произвольной линии тока и эквипотенциали; форму свободной поверхности потока; параметры потока в произвольной его точке.

Результаты, полученные из решения (34, 36), позволяют убедиться в высокой адекватности модели при $Fr_0 \geq 4$, что подтверждает правильность теоретических рассуждений в работе.

Выводы:

метод решения граничной задачи свободного растекания потока за безнапорными отверстиями, предложенный в работе, улучшает адекват-

ность модели по сравнению с известными моделями и позволяет объяснить наличие разветвления алгоритма при решении задачи в точке $Fr_0 = 4$;

метод необходимо развить применительно к растеканию потока за круглыми трубами, к растеканию потока с учетом сил сопротивления потоку, а также применительно к нестационарным потокам воды.

Библиографический список

1. Шеренков И.А. О плановой задаче растекания струи бурного потока несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – № 1. – С. 72 – 78.
2. Емцев Б.Т. Двухмерные бурные потоки. – М.: Энергия, 1967. – 212 с.
3. Коханенко В.Н. Решение краевой задачи по свободному растеканию потока для функции тока методами линейного программирования / В.Н. Коханенко, Е.Г. Баленко, Н.Г. Папченко // Интеграция науки, образования и бизнеса для обеспечения продовольственной безопасности Российской Федерации: материалы Междунар. науч.-практ. конф. / ДонГАУ. – Персиановский, 2011. – Т.2. – С. 181 – 185.
4. Коханенко В.Н. Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, В.В. Ширяев, Н.В. Коханенко; под общей ред. В.Н. Коханенко. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007. – 168 с.
5. Ширяев В.В. Развитие теории двухмерных открытых водных потоков: монография / В.В. Ширяев, М.Ф. Мицик, Е.В. Дуванская; под общей ред. В.В. Ширяева. – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 133 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА ЗА ВОДОПРОПУСКНЫМИ ТРУБАМИ

В.Н. Коханенко, М.Ф. Мицик

Донской государственный аграрный университет,
г. Новочеркасск,
Южно-Российский государственный университет
экономики и сервиса,
г. Шахты, Россия

Решение задачи свободного растекания бурного водного потока в широкое отводящее русло за водопропускными трубами, работающими в безнапорном или полунанпорном режиме, имеет большое значение для теории плановых потоков и практики использования результатов расчетов для проектирования ГТС дорожного, мелиоративного строительства, а также систем водопользования.

Как показывают экспериментальные исследования по изучению свободнорастекающегося бурного потока при их сравнении с известными моделями [1, 2], адекватность этих моделей оставляет желать лучшего и в настоящее время не отвечает потребностям практики.

Рассмотрим упрощенную модель потока. Основные допущения модели: поток открытый, бурный, двухмерный в плане, стационарный; поток имеет продольную ось симметрии в плане течения; дно отводящего русла плоское, горизонтальное; силы сопротивления потоку не учитываются; движение потока потенциальное.

Отмеченные ограничения на поток использовались и в теории [2, 3].

При указанных ограничениях опишем систему уравнений движения потока в физической плоскости течения. Справедлив интеграл Бернулли:

$$V^2/(2g) + h = H_0, \quad (1)$$

где V – модуль вектора скорости жидкой частицы потока; h – местная глубина потока; H_0 – постоянная, определяемая по известным значениям h_0, V_0 ; g – ускорение силы тяжести.

Справедливо уравнение неразрывности потока:

$$\frac{\partial(V_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y h)}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где $V_x = V \cos \theta$; $V_y = V \sin \theta$; θ – угол между вектором скорости и продольной осью симметрии потока OX ; система OXY – правая.

Из условия потенциальности потока следует:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Система уравнений движения потока есть нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных [3]

$$\begin{cases} V^2/(2g) + h = H_0; & V^2 = V_x^2 + V_y^2; \\ \frac{\partial(V_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y h)}{\partial y} = 0; & \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

и представляет собой замкнутую систему 3-х уравнений с тремя неизвестными функциями V_x, V_y, h ; x, y – независимые переменные.

Систему (4) можно заменить эквивалентной, вводя функции V, θ, h :

$$\begin{cases} V^2/(2g) + h = H_0; \\ \partial(Vh \cos \theta)/\partial x + \partial(Vh \sin \theta)/\partial y = 0; \\ \partial(V \cos \theta)/\partial y - \partial(V \sin \theta)/\partial x = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Перейдем в системе (5) к естественной форме. Для потенциальной функции $\Phi = \Phi(x; y)$ получим систему дифференциальных уравнений [2,4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left[c^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left[c^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0; \\ c = \sqrt{gh}; V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2; \frac{V^2}{2g} + h = H_0. \end{cases} \quad (6)$$

Аналогично (6) получим систему для функции тока $\Psi = \Psi(x; y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{1}{c^2 h^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \left[1 - \frac{1}{c^2 h^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{2}{c^2 h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0; \\ h V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; h V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}; c = \sqrt{gh}; \frac{V^2}{2g} + h = H_0; V^2 = V_x^2 + V_y^2. \end{cases} \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) могут служить исходными для разработки методов расчета двумерных бурных потоков.

В работе [2] изложен метод характеристик для исследования свойств бурного потока; рассмотрим некоторые из них. В плоскости годографа скорости уравнение характеристик имеет универсальный вид:

$$\theta = \pm \left(\sqrt{3} \arctg \sqrt{(Fr-1)/3} - \arctg \sqrt{Fr-1} \right) + C', \quad (8)$$

где $Fr = V^2/gh$; C' – постоянная, определяемая для заданной точки на характеристике. Этому уравнению соответствует в плоскости годографа скорости универсальная диаграмма характеристик (эпициклоид) (рис.1).

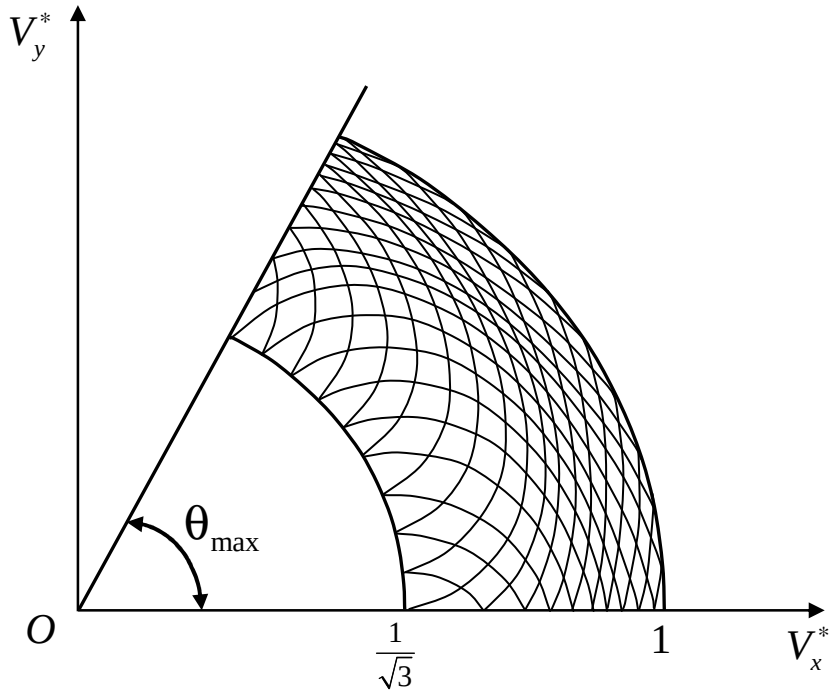


Рис. 1. Диаграмма характеристик в плоскости годографа скорости

$$V_x^* = V^* \cos \theta; V_y^* = V^* \sin \theta; V^* = V/V_{\max}; V_{\max} = \sqrt{2gH_0}.$$

Справедлива также формула

$$\sin \alpha = c/V = 1/\sqrt{Fr}, \quad (9)$$

где α – угол, образуемый каждой характеристикой с линией тока (рис.2).

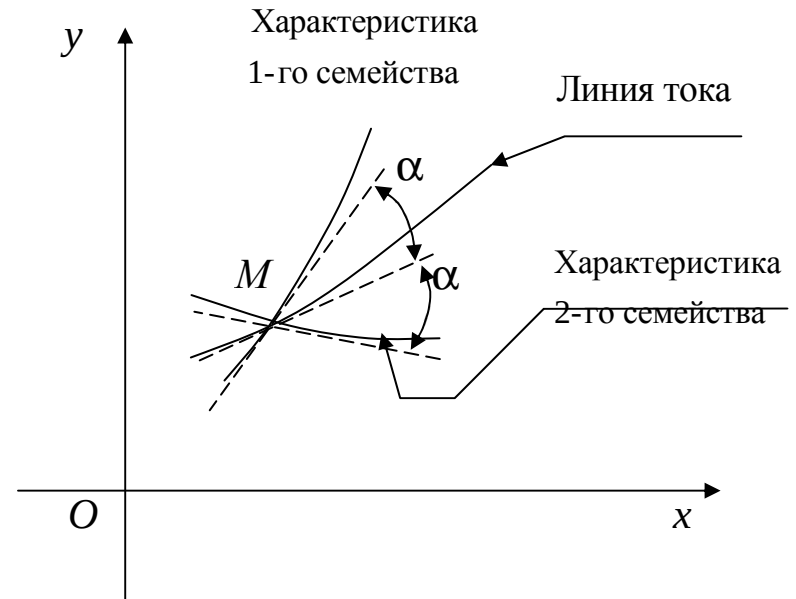


Рис. 2. Пара характеристик в точке M на линии тока

Из универсальной диаграммы характеристик следует, что если поток имеет ось симметрии и в задаче со свободными границами растекается до бесконечности, где $V^* = 1$, то характеристики, начинающиеся на оси симметрии, достигают предельного угла « $\theta_{\max}$ » при $V^* = 1$.

Одна из характеристик потока, проходящая через точку $(\tau = s\tau_0; \theta = 0, \tau \geq \tau_0)$, при $V^* \rightarrow 1$ будет приближаться к граничной линии тока, так как при $Fr \rightarrow \infty$, $\sin \alpha \rightarrow 0$.

Перейдем от уравнений движения потока в физической плоскости для потенциальной функции $\varphi = \varphi(x, y)$ и функции тока $\psi = \psi(x, y)$ к уравнениям для $\varphi = \varphi(\tau, \theta)$, $\psi = \psi(\tau, \theta)$ отно-

сительно аргументов τ, θ ; $\tau = \frac{V^2}{2gH_0} = (V^*)^2$ – квадрат скоростного коэффициента.

Для бурных потоков τ изменяется в пределах:

$$1/3 < \tau \leq 1. \quad (10)$$

Система уравнений движения потока в плоскости годографа скорости согласно [3], имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{h_0}{2H_0} \frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{cases} \quad (11)$$

где h_0 – глубина потока при минимальном τ_0 .

Справедлива следующая дифференциальная зависимость:

$$d(x + iy) = \frac{1}{V} e^{i\theta} \left(d\varphi + i \frac{h_0}{h} d\psi \right). \quad (12)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (11) по аргументу τ , а второе – по аргументу θ и приравнявая смешанные вторые частные производные, получим следующее уравнение математической физики:

$$\tau \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{1-\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{1-3\tau}{4\tau(1-\tau)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (13)$$

Для бурных потоков $\Delta = \frac{3\tau-1}{4(1-\tau)} > 0$ при $\frac{1}{3} < \tau < 1$

уравнение (13) – гиперболического типа. Воспользуемся методом разделения переменных [5]:

$$\psi(\tau; \theta) = \psi_1(\tau) \cdot \psi_2(\theta). \quad (14)$$

Функцию $\psi_2(\theta)$ можно выбрать в виде:

$$\psi_2(\theta) = \cos n\theta \quad \text{или} \quad \psi_2(\theta) = \sin n\theta. \quad (15)$$

Тогда уравнение (13) сводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка [6]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial \psi_{1n}}{\partial \tau} \right\} - n^2 \frac{1-3\tau}{4\tau(1-\tau)^2} \psi_{1n} = 0. \quad (16)$$

Полагая в (16) $n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots$, приведем его к виду:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial \psi_{1k}}{\partial \tau} \right\} - \frac{k^2(1-3\tau)}{\tau(1-\tau)^2} \psi_{1k} = 0. \quad (17)$$

Производя в (17) замену $\psi_{1k} = \tau^k Y_k(\tau)$, получим для функции $Y_k(\tau)$ известное гипергеометрическое уравнение [7]:

$$\tau(1-\tau) \frac{d^2 Y_k}{d\tau^2} + [2k+1-2k\tau] \frac{dY_k}{d\tau} + k(2k+1)Y_k = 0. \quad (18)$$

Общее решение уравнения (18) определяется в виде:

$$\psi_{1k} = A_k^{(1)} \psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \psi_{1k}^{(2)},$$

где $\psi_{1k}^{(1)} = \tau^k Y_k^{(1)}; \psi_{1k}^{(2)} = \tau^k Y_k^{(2)};$

$$Y_k^{(1)} = F(a_k, b_k, c_k, \tau) = 1 + \frac{a_k b_k}{c_k} \tau + \frac{1}{2!} \frac{a_k(a_k+1)b_k(b_k+1)}{c_k(c_k+1)} \tau^2 + \dots;$$

$$Y_k^{(2)} = \tau^{-2k} F(a_k - 2k, b_k - 2k, 1 - 2k, \tau); \quad (19)$$

$F(a_k, b_k, c_k, \tau)$ — гипергеометрическая функция.

Коэффициенты a_k, b_k, c_k определяются по формулам:

$$a_k = \frac{2k-1}{2} + \frac{\sqrt{12k^2+1}}{2}; b_k = \frac{2k-1}{2} - \frac{\sqrt{12k^2+1}}{2}; c_k = 2k+1. \quad (20)$$

Решение $Y_k^{(2)}$ является линейно независимым с решением $Y_k^{(1)}$.

Далее, полагая в уравнении (17) $n = 2k-1, k = 1, 2, 3, \dots$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial \psi_{1k}}{\partial \tau} \right\} - \frac{(2k-1)^2(1-3\tau)}{4\tau(1-\tau)^2} \psi_{1k} = 0. \quad (21)$$

Сделаем в (21) замену $\Psi_{1k} = \tau^{k-1/2} Y_k(\tau)$, (22)

оно также приводится к гипергеометрическому уравнению:

$$\tau(1-\tau) \frac{d^2 \bar{Y}_k}{d\tau^2} + [2k+1-2k\tau] \frac{\partial \bar{Y}_k}{\partial \tau} + k(2k+1) \bar{Y}_k = 0, \quad (23)$$

которое имеет следующее общее решение:

$$\Psi_{1k} = A_k^{*(1)} \tau^{k-1/2} Y_k^{*(1)} + A_k^{*(2)} \tau^{k-1/2} Y_k^{*(2)} = A_k^{*(1)} \Psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \Psi_{1k}^{*(2)}, \quad (24)$$

где $Y_k^{*(1)} = F(a_k, b_k, c_k, \tau) = 1 + \frac{a_k b_k}{c_k} \tau + \frac{1}{2!} \frac{a_k(a_k+1)b_k(b_k+1)}{c_k(c_k+1)} \tau^2 + \dots$;

$$Y_k^{*(2)} = \tau^{1-2k} F(a_k+1-2k, b_k+1-2k, 2-2k, \tau); \quad (25)$$

$$a_k^* = k-1+\sqrt{3k^2-3k+1}; b_k^* = k-1-\sqrt{3k^2-3k+1}; c_k^* = 2k.$$

С учетом (19), (25) общее решение уравнения (13) примет вид:

$$\begin{aligned} \Psi = & A_0 + B_0 \Psi_{10}(\theta) + C_0 \Psi_{20}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k^{(1)} \Psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \Psi_{1k}^{(2)} \right] \sin k\theta + \right. \\ & + \left[B_k^{(1)} \Psi_{1k}^{(1)} + B_k^{(2)} \Psi_{1k}^{(2)} \right] \cos k\theta \left. \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k^{*(1)} \Psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \Psi_{1k}^{*(2)} \right] \sin(2k-1)\theta + \right. \\ & + \left. \left[B_k^{*(1)} \Psi_{1k}^{(1)} + B_k^{*(2)} \Psi_{1k}^{(2)} \right] \cos(2k-1)\theta \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Решение для потенциальной функции определяется выражением

$$\begin{aligned} \varphi = & \varphi_0 + \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \left[\left(A_0 + C_0 \Psi_{20}(\tau) \right) \theta + \int B_0 \Psi_{10}(\theta) d\theta \right] + \\ & + \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k^{(1)} \Psi_{1k}^{(1)} + A_k^{(2)} \Psi_{1k}^{(2)} \right] \cdot \cos k\theta + \left[B_k^{(1)} \Psi_{1k}^{(1)} + B_k^{(2)} \Psi_{1k}^{(2)} \right] \cdot \sin k\theta \right\} + \\ & + \frac{2h_0}{H_0} \frac{\tau}{1-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k^{*(1)} \Psi_{1k}^{*(1)} + A_k^{*(2)} \Psi_{1k}^{*(2)} \right] \cdot \cos(2k-1)\theta + \left[B_k^{*(1)} \Psi_{1k}^{(1)} + B_k^{*(2)} \Psi_{1k}^{(2)} \right] \cdot \sin(2k-1)\theta \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Сформулируем граничные условия задачи в физической плоскости.

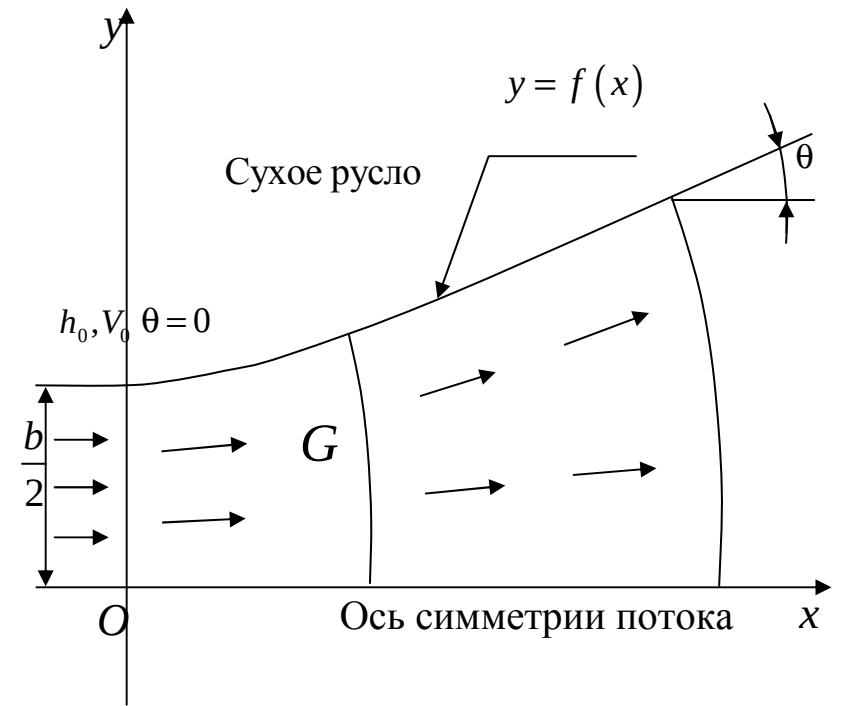


Рис. 3. План растекания потока

В силу симметрии потока рассматриваем только его верхнюю часть относительно оси симметрии ОХ (рис. 3). Необходимо определить в области растекания потока «G» его параметры

$$h = h(x; y), V = V(x; y), \theta = \theta(x; y) \quad (28)$$

и границу растекания потока $y = f(x)$ при следующих условиях:

$$x = 0; \quad y(0) = b/2;$$

$$V(0; y) = V_0, h(0; y) = h_0, \theta(0; y) = 0 \text{ при } 0 \leq y \leq b/2; \quad (29)$$

$$y'_x = f'_x = tg\theta - \text{ вдоль произвольной линии тока;}$$

при $x \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, V \rightarrow V_{\max}$; на оси симметрии потока $\theta(x; 0) \equiv 0$.

Доопределим задачу свободного растекания потока:

из формулы (8) определим характеристики, выходящие из точки $(\tau = \tau_0; \theta = 0)$, выберем из двух возможных характеристик ту, которая проходит в области G , и определим угол $\theta_{\max}$ при $\tau \rightarrow 1$, т.е. $h \rightarrow 0$ вдоль этой характеристики.

Покажем в рамках модели, описываемой системой дифференциальных уравнений (5), что вдоль граничной линии тока функция h изменяется монотонно от значения h_0 до нуля, функция V изменяется от V_0 до значения $V_{\max} = \sqrt{2gH_0}$, угол θ от нуля до $\theta_{\max}$. Известно, что бурный поток, растекаясь (без учета сил сопротивления потоку), будет неограниченно расширяться [3]. Выделим в потоке элементарную струйку шириной « b », тогда расход этой элементарной струйки равен

$$\Delta Q = V \cdot h \cdot b = \text{const.} \quad (30)$$

Беря логарифмическую производную этого выражения, получаем:

$$dV/V + dh/h + db/b = 0. \quad (31)$$

Из уравнения Бернулли дополнительно следует:

$$dh + VdV/g = 0. \quad (32)$$

Исключая из соотношений (31), (32) глубину h , получим:

$$db/b = (Fr - 1) \cdot dV/V,$$

для бурных потоков число Фруда $Fr > 1$, или

$$dV/V = 1/(Fr - 1) \cdot db/b. \quad (33)$$

Закономерность изменения глубины устанавливаем, учитывая, что

$$dh/h = -VdV/(hg) = -Fr \cdot dV/V, \quad (34)$$

и, следовательно,

$$dh/h = -Fr/(Fr - 1) \cdot db/b. \quad (35)$$

Из уравнений (33), (35) следует, что вдоль расширяющейся струйки ($db > 0$) бурного потока ($Fr > 1$) скорости возрастают ($dV > 0$), а глубины уменьшаются ($dh < 0$).

Из уравнения (33) нетрудно видеть, что поток расширяется вниз по течению. Переходя от элементарной струйки к потоку в целом, можно показать, что характер растекания всего потока будет совпадать с характером изменения глубин, скоростей и ширины потока вниз по течению с зависимостями (33)- (35) и справедлив вдоль произвольной линии тока.

Библиографический список

1. Справочник по гидравлике / под ред. В.А.Большакова. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Киев: Вища школа, 1984. – 343 с.
2. Емцев Б.Т. Двухмерные бурные потоки. – М.: Энергия, 1967. – 212 с.
3. Коханенко, В.Н. Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, В.В. Ширяев, Н.В. Коханенко; под общей ред. В.Н. Коханенко. – Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2007. – 168 с.
4. Ширяев В.В. Развитие теории двухмерных открытых водных потоков: монография / В.В. Ширяев, М.Ф. Мицик, Е.В. Дуванская: под общей ред. В.В. Ширяева. – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 133 с.
5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям; пер. с нем. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
7. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации; пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 609 с.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

И. Арутюнян, М.Э. Сивуха, Р.Л. Седов

Калининградский государственный технический университет,
г. Калининград, Россия

Рассмотрим линейную электрическую цепь, представленную на рис.1, которая содержит источник постоянной ЭДС, сопротивления R_1 , R_2 , R_3 и R_4 , индуктивность L , емкость C и контакт K , который замыкается во время коммутации.

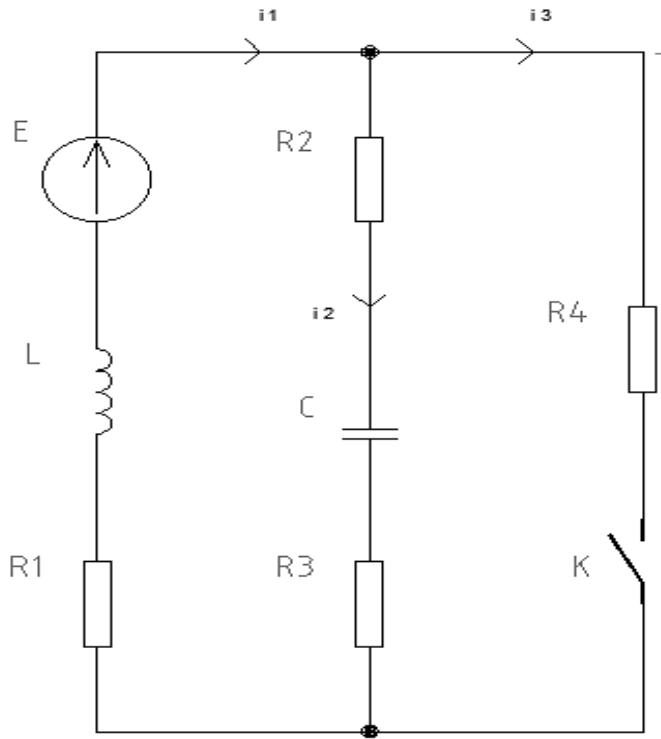


Рис. 1. Расчётная электрическая цепь

Согласно законам коммутации, это ток ветви с индуктивностью i_1 и падение напряжения на емкости uc .

$$R_1 \cdot i_1 + L \cdot \frac{di_1}{dt} + (R_2 + R_3) \cdot C \cdot \frac{duc}{dt} + uc = E, \quad (1)$$

$$R_4 \cdot i_1 - uc - (R_2 + R_3 + R_4) \cdot C \cdot \frac{duc}{dt} = 0$$

Определяем независимые начальные условия в схеме до коммутации. Так как источник ЭДС постоянный, то

$$i_1(0) = 0 \quad uc(0) = E$$

Из системы уравнений (1) определяем граничные условия

$$\frac{di_1}{dt}(0) = \frac{-(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_2) \cdot i_1(0) - R_4 \cdot uc(0) + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot E}{L \cdot (R_2 + R_3 + R_4)}$$

$$\frac{duc}{dt}(0) = \frac{R_4 \cdot i_1(0) - uc(0)}{C \cdot (R_2 + R_3 + R_4)}.$$

Дополнительные соотношения:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_1(t)}{dt}, \quad i_3(t) = i_1(t) - C \cdot \frac{duc(t)}{dt}, \quad u_{R_1}(t) = i_1(t) \cdot R_1,$$

$$u_{R_2}(t) = i_2(t) \cdot R_2, \quad u_{R_3}(t) = i_2(t) \cdot R_3, \quad u_{R_4}(t) = i_3(t) \cdot R_4.$$

Система (1) является системой двух обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений I порядка. В ходе численных экспериментов на базе инженерного пакета MathCAD были использованы 3 численных метода: встроенный метод на основе функции Odsolve, метод дробных сеток с полущелыми временными слоями и метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Численное интегрирование системы (1) с точки зрения вычислительной математики не является сложной задачей. Однако математическое моделирование и создание программных модулей на базе пакета MathCAD, по нашему мнению, является методически верным в ключе обобщения численных результатов и внедрения их в учебный процесс технического университета по дисциплине «Математическое моделирование на компьютере».

Численный метод Рунге-Кутты требует специального вида системы дифференциальных уравнений:

$$X' = D(t, X),$$

где X – столбец зависимых переменных; t – независимая переменная, $D(t, X)$ – функция-столбец правых частей системы.

Разрешая систему (1) относительно первых производных, получаем новый вид задачи Коши:

$$X_0 := 0 \quad X_1 := E$$

$$X_2 := \frac{-(R1 \cdot R2 + R1 \cdot R3 + R1 \cdot R4 + R4 \cdot R2 + R4 \cdot R3) \cdot X_0 - R4 \cdot X_1 + (R1 + R3 + R4) \cdot E}{L \cdot (R2 + R3 + R4)}$$

$$X_3 := \frac{R4 \cdot X_0 - X_1}{C \cdot (R2 + R3 + R4)}$$

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \frac{(R2 + R1) \cdot (X_3 - R4 \cdot X_2)}{L \cdot (R2 + R3 + R4)} + \frac{-X_3 - R1 \cdot X_2}{L} \\ \frac{X_3 - R4 \cdot X_2}{-C \cdot (R2 + R3 + R4)} \end{bmatrix}$$

Применяем метод Рунге-Кутты при значениях параметров электрической цепи:

$$E := 100 \quad L := 10^{-3} \quad C := 10^{-5} \quad R1 := 20 \quad R2 := 11 \quad R4 := 2 \quad R3 := 9$$

Расчетный период выбран интервалом $[0; 10^{-3}]$. Мощность сетки интегрирования $N=1000$.

Получены интегральные линии:

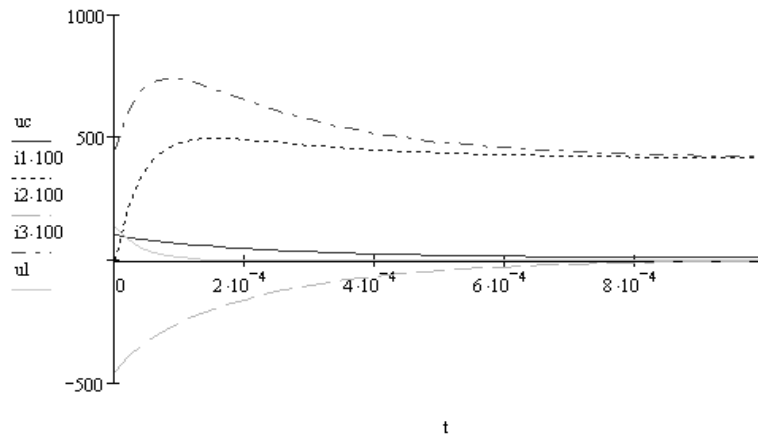


Рис. 2. Зависимости $u(t)$, В – сплошная линия; $i1(t) \cdot 100$, А – частый пунктир. Дополнительные графики: $i2(t) \cdot 100$, А; $i3(t) \cdot 100$, А; $u1(t)$, В

На основании графиков, полученных при численном методе решения, можно сделать вывод, что переходный процесс заканчивается через 0,001 секунды, что в момент коммутации скачок тока ветви с емкостью составляет 4,55 А, что установившееся значение напряжения на емкости равно 9,09 В, что максимальное значение тока ветви с индуктивностью достигается через 0,0012 секунды и составляет 4,95 А. Данные расчета, полученные в численном методе решения, полностью совпадают с результатами аналитических методов. Например, при расчете классическим методом получили:

$$u_C(t) = 9.09 + 88.76 \cdot e^{-4593 \cdot t} + 2.15 \cdot e^{-21770 \cdot t},$$

$$i_2(t) = -4.08 \cdot e^{-4593 \cdot t} - 0.47 \cdot e^{-21770 \cdot t}.$$

Численные результаты моделирования с 3%-ной точностью согласуются с аналитическим решением системы (1).

О ГРАВИТАЦИОННОМ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ЖИДКОСТИ В СЛОИСТЫХ НЕФТЯНЫХ ПЛАСТАХ

Г.А. Никифоров

Учреждение Российской академии наук Институт механики
и машиностроения Казанского научного центра РАН,
г. Казань, Россия

Решается задача о движении двухфазной жидкости в пористом теле. Задача сформулирована в переменных «скорость – насыщенность». Численное решение получено методом контрольных объемов. Метод контрольных объемов реализован на разнесенной прямоугольной сетке для скоростей и водонасыщенности с применением схемы WENO. Решены задачи о гравитационном перераспределении жидкости в слоистом нефтяном пласте.

1. Постановка задачи

Рассматривается двухфазная изотермическая фильтрация несжимаемых несмешивающихся жидкостей в неоднородном недеформируемом пористом теле. Полагается, что динамические вязкости фаз постоянны, течение жидкостей медленное (т. е. насыщенности фаз меняются квазиравновесным образом) и происходит без фазовых переходов, а функции относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления являются известными и однозначными функциями насыщенности.

С учетом капиллярных и гравитационных сил законы фильтрации для двух фаз можно записать [1] в виде уравнений неразрывности

$$m \frac{\partial S_i}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{U}_i) = 0, \quad (i=o, w) \quad (1)$$

и уравнений движения

$$\mathbf{U}_i = -k \frac{f_i}{\mu_i} \text{grad}(P_i - \rho_i g z), \quad (i=o, w), \quad (2)$$

где m – пористость; k – абсолютная проницаемость; P_i – давление в фазах; μ_i – динамическая вязкость; $\mathbf{U}_i$ – скорость фильтрации i -ой фазы; S_i – насыщенность пористого тела i -й фазой; f_i – функция относительной фазовой проницаемости; ρ_i – плотность фазы; g – ускорение свободного падения. Индексы $i=w$ и $i=o$ соответствуют величинам, характеризующим смачивающую и несмачивающую фазы.

Разность давлений в фазах принимается равной капиллярному давлению:

$$P_o - P_w = P_c, \quad (3)$$

а насыщенности фаз удовлетворяют условию

$$S_o + S_w = 1. \quad (4)$$

Введением суммарной скорости фильтрации

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_o + \mathbf{U}_w \quad (5)$$

и после некоторых преобразований система уравнений приводится к виду [2,3]:

$$\text{div}(\mathbf{U}) = 0, \quad (6)$$

$$\text{rot}(\mathbf{U} / K) = \text{rot}(F \text{grad}(P_k)), \quad (7)$$

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div}[F \mathbf{U} + F_{ow} \text{grad}(P_k)] = 0. \quad (8)$$

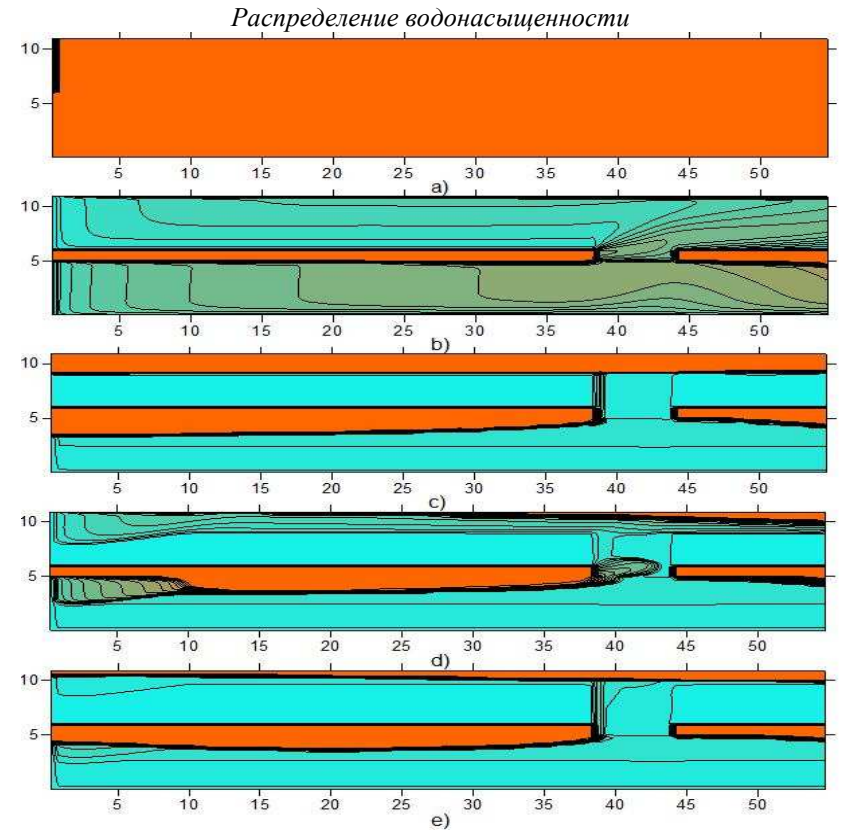
2. Метод численного решения

Область течения покрывается прямоугольной сеткой с шагом Δx по оси X и Δy – по оси Y . Для системы (6) - (8) применяется метод контрольных объемов. Искомые значения скорости связываются с серединами сторон ячеек, а насыщенности – с центрами ячеек. Для уравнения (8) используется схема WENO [4,5]. Дискретизация по времени выполняется методом Рунге-Кутты третьего порядка.

3. Численные результаты

Решена задача о гравитационном перераспределении жидкости в слоистом нефтяном пласте. Пласт длиной 55 м, состоящий из двух пропластков, разделенных непроницаемой перемычкой. Мощность каждого пропластка составляет 5 м. Перемычка толщиной 1 м имеет литологическое окно размером 5 м. Проницаемость верхнего пропластка равна 1 мкм^2 , а нижнего – $0,05 \text{ мкм}^2$.

Вода поступает в пласт через левую границу, а через правую границу осуществляется отбор жидкости. После того как обводненность продукции на выходе из пласта превысит 98%, закачка воды прекращалась. Через 30 лет простоя закачка воды возобновилась. При этом обводненность продукции на выходе из пласта составила 94%, т.е. в результате гравитационной сегрегации появилась возможность дополнительного отбора нефти из пласта.



для различных моментов времени: а) начальное распределение водонасыщенности;

б) момент достижения обводненности пласта 98%;

в) после достижения 98% пласт находился в покое 30 лет;

г) момент достижения вторичного обводнения пласта 98%;

е) три года спустя после вторичного обводнения

Вторичное достижение обводненности продукции 98% на выходе из пласта было достигнуто через три года.

4. Заключение

Показано, что при наличии литологических окон между пропластками межпластовые перетоки могут приводить к существенным перераспределениям остаточных запасов нефти, что необходимо учитывать при разработке таких объектов.

Библиографический список

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 207 с.
2. Никифоров А.И. Об уравнениях двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей // Численные методы решения задач фильтрации и оптимизации нефтедобычи. – Казань, 1990. – С. 75 – 78.
3. Никифоров Г.А. Моделирование двухфазной фильтрации в переменных «скорость–насыщенность» // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 83 – 92.
4. Chi-Wang Shu. High-order Finite Difference and Finite Volume WENO Schemes and Discontinuous Galerkin Methods for CFD // Intern. J. Computational Fluid Dynamics. – 2003. – V.17, № 2. – P. 107 – 118.
5. Huber R., Helmig R. Node-centered finite volume discretizations for the numerical simulation of multiphase flow in heterogeneous porous media // Computational Geosciences. – 2000. – V. 4. – P. 141–164.

ЗАДАЧА СТЕКЛОВА

С.Д. Алгазин

Учреждение Российской академии наук
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского,
г. Москва, Россия

В работе [1] рассмотрено много классических спектральных задач. В настоящей работе идеи этой книги обобщаются на задачу Стеклова, в которой спектральный параметр входит в граничное условие.

1. Постановка задачи. Рассмотрим ограниченную односвязную область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть ρ – неотрицательная гладкая функция на границе, не равная нулю тождественно. Задача на собственные значения с граничным условием Стеклова определяется следующими соотношениями [2]:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в области } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda \rho u & \text{на границе } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

где d/dn – нормальная производная вдоль границы. Существуют различные физические интерпретации задачи Стеклова [3,4]. В частности, она описывает свободные колебания мембраны, у которой вся масса $M(\Omega)$ сосредоточена на границе $\partial\Omega$ и распределена на ней с плотностью ρ :

$$M(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \rho(s) ds.$$

Если $\rho \equiv 1$, то масса $M(\Omega)$ в точности равна длине границы области Ω . Задача Стеклова имеет дискретный спектр

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \nearrow \infty.$$

2. Дискретизация. Если $z=w(\zeta)$, $|\zeta| \leq 1$ – функция, задающая конформное отображение единичного круга на область Ω , то в плоскости ζ граничное условие в соотношении (1.1) приобретает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \lambda \rho(w(e^{i\varphi})) \left| w'(e^{i\varphi}) \right| u. \quad (2.1)$$

В круге решение определяется формулой Пуассона:

$$u(\zeta) = \int_0^{2\pi} K_0(\zeta, \theta) \psi(\theta) d\theta, \quad (2.2)$$

ψ – значение u на границе.

$$K_0(\zeta, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-\varphi)}, \quad \zeta = re^{i\varphi}.$$

Заметим, что

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}, \quad 0 \leq r < 1, t \in [0, 2\pi].$$

Эта формула доказывается суммированием геометрической прогрессии со знаменателем re^{it} .

Применим для ψ интерполяцию тригонометрическим полином степени n :

$$\psi(\theta) = P_n(\theta; \psi) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{2n} D_n(\theta - \theta_j) \psi_j + \rho_n(\theta; \psi), \quad \psi_j = \psi(\theta_j), \quad \theta_j = \frac{2\pi j}{N},$$

$$j = 0, 1, \dots, 2n; \quad D_n(\theta - \theta_j) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(\theta - \theta_j).$$

Здесь ρ_n – погрешность интерполяции, $N=2n+1$ число точек на границе круга. Легко получаем, что

$$H_j^0(\zeta) = \int_0^{2\pi} K_0(\zeta, \theta) D_n(\theta - \theta_j) d\theta = \frac{2}{N} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{L=1}^n r^L \cos L(\varphi - \theta_j) \right\}, \quad \zeta = re^{i\varphi}.$$

Отсюда следует:

$$u(\zeta) = \sum_{j=0}^{2n} H_j^0(\zeta) \psi_j + \tilde{\rho}_n(\zeta; \psi), \quad \tilde{\rho}_n(\zeta; \psi) = \int_0^{2\pi} K_0(\zeta, \theta) \rho_n(\theta; \psi) d\theta.$$

Из граничного условия (2.1) получаем для определения вектора $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{2n})$ систему линейных уравнений $\sum_{j=0}^{2n} B_{kj} \psi_j + \delta_k = 0$, где δ_k – погрешность дискретизации,

$$B_{kj} = -\lambda \rho_k |w'(e^{i\theta_k})| \delta_{kj} + H_j^{0'}(\theta_k), \quad H_j^{0'}(\theta_k) = \frac{2}{N} \sum_{L=1}^n L \cos L(\theta_k - \theta_j) = C_{kj}.$$

В результате получаем приближённую дискретную задачу на собственные значения

$$C\psi = \lambda \rho z \psi, \quad (2.3)$$

где C – матрица $N \times N$; ρ и z – диагональные матрицы, на диагонали у которых стоят значения функций ρ и $|w'(e^{i\varphi})|$ на границе круга в узлах сетки.

3. Аналитическое решение для круга при $\rho=1$. Спектральная задача (2.3) при $\rho=1$ в круге имеет точные собственные значения $\lambda_k=k$, $k=0, 1, 2, \dots, n$, а соответствующие собственные вектора $\cos k\theta_j$ и $\sin k\theta_j$, $\theta_j = \frac{2\pi j}{N}$, $j=0, 1, \dots, 2n$. Это наталкивает на мысль, что $\lambda_k=k$, $k=0, 1, 2, \dots$ – точные собственные значения дифференциальной задачи (1.1), а значения на границе условия соответствующих собственных функций $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$. Из интеграла Пуассона (2.2) получаем, что $u_k = r^k e^{ik\varphi}$ – собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda_k=k$. Непосредственная проверка подтверждает это предположение.

4. Обсуждение свойств применяемой дискретизации. Исследуемая выше двумерная спектральная задача Стеклова для оператора Лапласа рассматривается только в гладких областях. Решение этой задачи (собственные функции) бесконечно дифференцируемы либо даже аналитичны, и поэтому для создания эффективных алгоритмов необходимо учесть эту колоссальную априорную информацию. Традиционные методы конечных разностей и конечных элементов почти не используют информацию о гладкости решения, т. е. это методы с насыщением. Термин «насыщение» введен К. И. Бабенко [5]. Рассмотрим, что это означает в рассматриваемом случае. Легко видеть [5], что $\max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\rho_n(\theta; \psi)| \leq (1 + \omega_{2n+1}) E_n(\psi)$, где $\omega_{2n+1} = O(\ln(n))$ – константа

Лебега интерполяции, а $E_n(\psi) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\psi(\theta) - P_n(\theta)|$ – наилучшее

приближение функции ψ тригонометрическим многочленом степени не выше n в норме C^1 . Скорость стремления к нулю E_n даётся следующей теоремой [6, стр. 239]:

Теорема. Если $f(x)$ – периодическая функция, которая имеет производную p – го порядка $f^{(p)}(x)$, удовлетворяющую условию Липшица

$$|f^{(p)}(x') - f^{(p)}(x'')| < K |x' - x''|,$$

то наилучшее тригонометрическое приближение её подчинено неравенству

$$E_n(f) < \frac{C^{p+1} K}{n^{p+1}},$$

где C – абсолютная постоянная.

Таким образом, при том же самом числе узлов сетки применяемая интерполяция тем точнее, чем глаже интерполируемая функция. Более того, а priori гладкость функции можно не знать. Метод сам настроится на неё. Эффективность этой методики рассмотрим на конкретных примерах.

5. Вычислительные эксперименты. В качестве примера рассмотрим область, ограниченную эпитрохойдой: $w(\zeta) = \zeta(1 + \varepsilon \zeta^m)$, $m=12$, $\varepsilon=0.0625$. Результаты расчётов приведены в табл. 1 – 3:

¹ $P_n(\theta)$ – тригонометрический полином степени n , наименее отклоняющийся от ψ в рассматриваемом промежутке.

Таблица 1

Эпитрохоида $m=12$, $\varepsilon=0.0625$. Первые 11 собственных значений

№	N=21	N=41	N=81	N=161	N=321	N=641
2	0.828	0.836	0.837192	0.837204	0.83720667	0.837206647491
3	0.828	0.838	0.837204	0.837209	0.8372066473	0.837206647499
4	1.61	1.639	1.64011	1.6401311	1.6401314034	1.640131403869
5	1.61	1.639	1.64011	1.6401311	1.6401314034	1.640131403872
6	2.3	2.3970	2.3964	2.3965038	2.396504053	2.396504055559
7	2.3	2.3970	2.3966	2.3965038	2.396504057	2.396504055560
8	2.7	3.0765	3.07690	3.0769456	3.0769459320	3.076945932853
9	2.7	3.0771	3.07690	3.0769456	3.0769459320	3.076945932858
10	4.2	3.604	3.606830	3.606823	3.6068261310	3.606826131454
11	4.2	3.609	3.606823	3.606829	3.606826130	3.606826131458

Таблица 2

Эпитрохоида $m=12$, $\varepsilon=0.0625$. Вычисление далёких собственных значений

№	N=641	N=1261	N=2561
100	42.86121433020	42.86121433026	42.8612143302754
101	42.86121433025	42.86121433031	42.8612143303380
200	85.2104437771	85.21044377729	85.2104437772412
201	85.2104437772	85.21044377739	85.2104437773712
300	127.254537080	127.25453708059	127.254537080580
301	128.600470841	128.60047084428	128.600470844300
400	170.0	170.5739274371	170.573927437190
401	170.0	170.5739274372	170.573927437190
500	-	213.08236557370	213.082365573797
501	-	213.0823655740	213.082365573979

Таблица 3

*Эпитрохоида $m=12$, $\varepsilon=0.0625$.
Вычисление очень далёких собственных значений*

№	N=2561	N=5121	N=7121
1000	426.1257592918	426.125759292050	426.125759292101
1001	426.1257592925	426.125759292391	426.125759292433
1500	639.1141120	639.114112192667	639.114112192464
1501	639.2115412	639.211541350273	639.211541350335
2000	-	852.213036288668	852.213036288790
2001	-	852.213036290034	852.213036289717
2500	-	1065.26548241862	1065.26548241924
2501	-	1065.26548242129	1065.26548242067
3000	-	1278.31651013740	1278.31651014143
3001	-	1278.32022291914	1278.32022291494

Таким образом, возможно вычислить 3000 собственных значений с 9 знаками после запятой.

Далее проводилось сравнение с результатами работы [7]. Проверялось неравенство $\lambda_n(\Omega)M(\Omega) \leq 2\pi n$ (собственные значения в этой работе нумеруются с нуля). Неравенство выполняется, причём при $n=1$ оно близко к равенству. Таким образом, для первого собственного значения справедлива приближённая формула

$$\lambda_1(\Omega) \approx 2\pi / M(\Omega) .$$

Библиографический список

1. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы классической математической физики. – М.: Диалог-МИФИ, 2010. – 240 с.
2. Stekloff W. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 19 (1902), 455-490.
3. Bandle C. Isoperimetric Inequalities and Applications. – Pitman, Boston, 1980.
4. Payne L. Isoperimetric Inequalities and Their Applications // SIAM Rev., 9:3 (1967), 453 – 488.
5. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.; 2-е изд., испр. и доп. / под ред. А. Д. Брюно. – М.; Ижевск: РХД, 2002. – 847 с.
6. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – М.: Гостехтеориздат, 1954. – 328 с.
7. Жируар А., Полтерович И. Об оценках Херша-Пэйна-Шиффера для собственных значений задачи Стеклова // Функциональный анализ и его приложения. – 2010. – Т. 44. – Вып. 2. – С. 33 – 47.

2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

РАНДОМИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СОБОЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И.Н. Статников, Г.И. Фирсов

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,
г. Москва, Россия

Разработанные И.М.Соболем ЛП_q-последовательности двоично-рациональных псевдослучайных чисел $q(0 < q < 1)$ [1], предназначенные изначально для расчёта многомерных интегралов, стали позже применяться и для реализации поисковых процедур. Однако в этом случае [2] реализовывалась идеология «слепого» поиска, как это характерно для методов семейства Монте-Карло. Это приводит к затруднениям при интерпретации многочисленных результатов, достигаемых при проведении вычислительных экспериментов, особенно когда отыскание экстремума не является единственной целью решаемой задачи.

Структура указанных в [1,2] ЛП_q-последовательностей позволила комбинаторным путём [3] планировать построение в J -мерном ($J \leq 51$) пространстве параметров исследуемой (-х) функции (-й) решётки, с помощью которых можно было получить ответы на такие вопросы [3,4]:

какие из варьируемых параметров с заданной (требуемой) вероятностью оказывают существенное влияние на значения функции – критерия качества (КК); иначе говоря, статистически оценивать производную КК от каждого варьируемого параметра;

по заданной метрике между текущим значением КК и его экстремальным значением, известным априори или определяемым по ходу проводимых расчётов, определить область (-и) концентрации наилучших (достижимых) значений критерия (-ев);

построить в многомерном пространстве КК множество Парето или, если задана схема компромисса между КК, выделить в J -мерном пространстве параметров подобласть, содержащую наибольшую концентрацию компромиссных решений;

аппроксимировать выделенные подобласти регрессионными зависимостями с использованием при этом ряда формул для подсчёта разных комбинаций варьируемых параметров, приведенных в [3].

На основе описанной выше процедуры построен метод планируемого ЛП-поиска (ПЛП-поиск). Сущность ПЛП-поиска [1] заключается в следующем: ПЛП-поиск – метод планирования ЛП_т-последовательностей [2], реализующий синтез идей дискретного обзора J -мерного ($J \leq 51$) пространства исследуемых (варьируемых) параметров (ВП) с идеями теории планирования математических (вычислительных) экспериментов (ВЭ). Некоторые возможности использования ПЛП-поиска указаны в работах [3,4].

В настоящей работе кратко опишем инструментальные возможности метода. Решётки, образуемые в ПЛП-поиске, представляют собой матрицу планируемых экспериментов (МПЭ) размерности $(N_0 \times J)$, где N_0 – число строк МПЭ или число ВЭ; J – число ВП α_j ($j = 1, \dots, J$) или столбцов МПЭ; M – число уровней, на которые разбивается j -й варьируемый параметр ($M = \text{const}$ или $M_j = \text{var}$). Типы МПЭ, которые могут быть реализованы в ПЛП-поиске:

- 1) все ВП разбиваются на одинаковое число уровней M ; в этом варианте $N_0 = MH$, где H – объём выборки (число значений вычисляемой функции) в i -м сечении j -го параметра;
- 2) все ВП разбиваются на неодинаковое число уровней M_j в этом варианте $N_0 = \sum H_{ij}$ ($i = 1, \dots, M_j$);
- 3) п.п. 1 и 2 могут реализовываться при необходимости для разных сочетаний α_{j*} , α_{j**} и ε_j , где α_{j*} и α_{j**} – соответственно нижняя и верхняя границы изменения j -го параметра, а $0 \leq \varepsilon_j < 1$ (например, $(\alpha_{j*} + \varepsilon_j, \alpha_{j**} - \varepsilon_j)$ и $(\alpha_{j*} - \varepsilon_j, \alpha_{j**} + \varepsilon_j)$).

Изложенный подход применялся при решении целого ряда конкретных задач исследования, оптимизации и идентификации различных механических систем, в частности, для синтеза шарнирно-рычажного четырехзвенного механизма съемного гребня чесальной машины с разгрузателем и проектирования зубчато-рычажного механизма с остановкой, широко используемого в эмалировочных автоматах, в автоматах пищевой и полиграфической промышленности, в револьверных подачах прессов и т.д. С помощью рандомизации области изменения параметров выполнены оптимизация резонансного преобразователя для судовых валопроводов, используемого в целях снижения уровня их продольных колебаний, и получены оптимальные значения инерционно-жесткостных параметров динамической системы с 23-мя степенями свободы, описывающей двухступенчатый планетарный судовой редуктор. Показана принципиальная возможность отстройки собственных частот от заданных рабочих диапазонов для конкретных моделей редукторов.

Библиографический список

1. Соболев И.М. Многомерные квадратные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, Физматлит, 1969. – 288 с.

2. Соболев И.М., Статников Р.Б.. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Дрофа, 2006. – 175 с.

3. Статников И.Н., Андреев Е.В. ППП-поиск–эвристический метод решения задач математического программирования. – М.: ИИЦ МГУДТ, 2006. – 140 с.

4. Статников И.Н., Фирсов Г.И. ППП-поиск и его реализация в среде MATLAB // Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB. – М.: ИПУ РАН, 2004. – С. 398 – 411.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РАВНОМЕРНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Л. Б. Матусов

Институт машиноведения РАН,
г. Москва, Россия

Последовательности многомерных точек могут обладать различными свойствами равномерности [1]. Сложность заключается в том, что для решения практических задач эти свойства должны выполняться уже при сравнительно небольших количествах точек. Только в этом случае данные последовательности могут быть успешно использованы при решении практических задач, относящихся к теории кубатурных формул, в задачах оптимизации машин и механизмов и т.д. С этой целью в статье [2] были сформулированы некоторые дополнительные требования к равномерно распределенным последовательностям.

Рассмотрим K^n – единичный n -мерный куб.

1. Свойство А. Разобьем куб K^n плоскостями $x_j = I/2$ при $j=1, 2, \dots, n$ на $t=2^n$ октантов, которые будем считать двоичными параллелепипедами. Разобьем последовательность точек $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ на двоичные участки, длина которых равна 2^n : $P_0, \dots, P_{t-1}, P_t, \dots, P_{2t-1}, P_{2t}, \dots, P_{3t-1}, \dots$. Если в любом из этих участков все точки принадлежат различным октантам, то мы говорим, что последовательность обладает свойством А.

Согласно [2] справедлива теорема:

ЛП τ – последовательность $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ обладает свойством А тогда и только тогда, когда определитель (размером $n \times n$), составленный из первых столбцов всех направляющих матриц, равен $I \pmod{2}$.

Данная теорема дает возможность строить **ЛП τ** – последовательности со свойством А. Однако остается открытым вопрос: можно ли в качестве последовательности операторов $\{L_k\}$ брать все операторы

низших порядков. Вопрос обоснован тем, что именно в этом случае значение $\mathcal{T}$ будет минимальным, что наилучшим образом отразится на всех характеристиках равномерности. Чтобы ответить на него, рассмотрим следующие утверждения.

Пусть $L_1, L_2, \dots, L_n$ – различные моноциклические операторы с порядками $m_1, m_2, \dots, m_n$ соответственно.

Лемма 1. Пусть $p^j(i)$ есть ДР-последовательности, соответствующие всем моноциклическим операторам низших порядков $L_1, \dots, L_n$. Пусть m -порядок оператора L_n . Тогда справедливо следующее неравенство:

$$n + \frac{m(m+1)}{2} < 2^m \text{ при } m \geq 5. \quad (1.1)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по m . При $m=5$ неравенство справедливо, так как максимальное n при этом равно 13[2]. Пусть для некоторого m имеет место (1.1) при любом n , соответствующем данному m . Докажем, что при любом n , соответствующем $m+1$, будет выполняться аналогичное неравенство. Учитывая, что число

моноциклических операторов порядка $m+1$ равно $\frac{\phi(2^m - 1)}{m+1}$, (где $\phi(k)$ –

теоретико-числовая функция Эйлера, равная количеству натуральных чисел меньших k и взаимно простых с k), докажем, что

$$n + \frac{\phi(2^m - 1)}{m+1} + \frac{(m+1)(m+2)}{2} < 2^{m+1}.$$

Преобразуем данное неравенство следующим образом :

$$n + \frac{\phi(2^{m+1} - 1)}{m+1} + \frac{(m+1)m}{2} + m+1 < 2^m + 2^m.$$

Сравнивая его с (1.1), остается показать, что

$$\frac{\phi(2^{m+1} - 1)}{m+1} + m+1 < 2^m, \text{ т.е. } \phi(2^{m+1} - 1) + (m+1)^2 < (m+1) 2^m.$$

Очевидно, что $\phi(2^{m+1} - 1) + (m+1)^2 < 2^{m+1} - 1 + (m+1)^2 < (m+1) 2^m$.

Окончательно имеем $(m+1)^2 - 1 < (m-1) 2^m$.

Таким образом, приходим к очевидному неравенству, которое справедливо при $m \geq 3$.

Пусть $m(n)$ – порядок моноциклического оператора, стоящего на n -м месте в последовательности всех моноциклических операторов, взятых подряд.

Лемма 2. Рассмотрим n -й последовательность элементов $GF(2)$ $\{u_i^{(k)}\}$, $k=1, \dots, n-1$, $i=0, 1, 2, \dots$. Пусть к данному набору принадлежит последовательность, состоящая из единиц, и пусть определитель

$$\begin{vmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_{n-1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 1 \pmod{2}.$$

Рассмотрим моноциклический оператор L_n порядка $m \geq m(n)$, $m \geq 5$. Тогда существует такое решение оператора L_n $\{u_i^{(n)}\}$, что определитель

$$\begin{vmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_{n-1}^{(1)} & u_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_{n-1}^{(n-1)} & u_n^{(n-1)} \\ 1 & \dots & u_{n-1}^{(n)} & u_n^{(n)} \end{vmatrix} = 1 \pmod{2}. \quad (1.2)$$

Доказательство. Допустим обратное: как бы ни выбирать первые m значений решения оператора L_n , определитель (1.2) равен $0 \pmod{2}$. Т.к. столбцы предыдущего определителя линейно независимы, то первые $n-1$ элемент последнего столбца в (1.2) единственным образом выражаются через эти столбцы. Но в силу указанного предположения последний элемент n -го столбца в (1.2) должен таким же образом выражаться через элементы n -й строки, принадлежащие соответствующим столбцам в (1.2), при любом выборе первых m значений последней строки в (1.2). Т.е. для последней строки имеем

$$u_n^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k u_k^{(n)} \quad c_k \in \{0, 1\} \quad \text{или} \quad u_{i_0}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1-i_0} c_{i_0+k} u_{i_0+k}^{(n)} + u_n^{(n)}, c_{i_0} = 1, \quad c_i = 0 \text{ при } i < i_0 \quad (1.3)$$

при произвольных, начинающихся с единицы, первых m значениях этой строки. Это означает, что любое решение моноциклического оператора L_n является решением линейного разностного оператора порядка $n-i_0$:

$$L^*(u_i) = u_i + \sum_{k=1}^{n-1-i_0} c_{i+k} u_{i+k} + u_{i+n-i_0}.$$

Действительно, пусть $\{u_i^{(n)}\}$ – решение моноциклического оператора L_n . Если в качестве последней строки в (1.2) взять любой участок этого решения, начинающийся с I , то получим (1.3). Возьмем произвольный участок длины n , начинающийся с нуля. Его в силу того, что первые m значений можно выбирать произвольно, представим в виде суммы двух участков той же длины, начинающихся с I . А так как для этих участков выполняется (1.3), то (1.3) справедливо и для данного участка, начинающегося с 0. Т.е. при любых начальных значениях $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$, ..., $u_m^{(n)}$ выполняется (1.3). А это и означает, что всякое решение моноциклического оператора L_n порядка m является решением линейного разностного оператора $L^*(u_i)$. Раз это так, то многочлен, соответствующий $L^*(u_i)$, должен делиться на многочлен, соответствующий оператору L_n .

Пусть

$$x^{n-i_0} + a_{n-i_0-1}x^{n-i_0-1} + \dots + a_1x + 1 \quad (1.4)$$

многочлен над полем $GF(2)$, соответствующий оператору L^* . Покажем, что если многочлен, соответствующий L_n ,

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + 1 \quad (1.5)$$

является делителем многочлена (1.4), то он будет делителем некоторого многочлена большей степени, у которого нет в качестве слагаемых одночленов вида x^k , где $k \leq m$, за исключением I .

Пусть (1.4) содержит в качестве слагаемого некоторый одночлен x^k , где $k \leq m$ (т.е. $a_k = I$).

Умножая (1.4) на $x^k + I$, получим многочлен степени $n-i_0 + k$, у которого коэффициент при x^k , т.е. $a_k = 0$.

Аналогично можно поступить с любым слагаемым степени, не большей m . Получим многочлен, у которого степень предпоследнего члена больше m , а максимальная степень самого многочлена равна

$$n-i_0 + \frac{m(m+1)}{2}, \text{ т.е.}$$

$$x^{n-i_0 + \frac{m(m+1)}{2}} + \dots + a_{m+1}x^{m+1} + 1. \quad (1.6)$$

Если многочлен (1.5) делит (1.4), то он должен делить и многочлен (1.6). С другой стороны (1.6), как и многочлен (1.4), содержит четное

число слагаемых, так как по условию этой леммы одна из строк (1.2) состоит из единиц. Поэтому (1.6) можно представить в виде суммы двучленов:

$$(x^{n-i_0+\frac{m(m+1)}{2}}+1)+\dots+(x^{m+p}+1) \quad (p>0). \quad (1.7)$$

Разделим каждый из этих двучленов на (1.5). Так как (1.5) соответствует моноциклическому оператору L_n порядка m , то, согласно [1], является делителем двучлена $(x^{2m-1}+1)$, но не является делителем никакого двучлена x^s+1 , где $s<2^m-I$. Но в силу леммы 1 степень многочлена (1.6) меньше 2^m-I . Поэтому, разделив почленно (1.7) на (1.5), получим

$$(x^m+\dots+a_1x+1)(x^{p_1}+\dots+x^{p_1-c_1})+\dots+x^{k_1}+\dots+1+\dots+(x^m+\dots+a_1x+1)(x^{p_k}+\dots+x^{p_k-c_k})+x^{k_1}+\dots+1=(x^m+\dots+a_1x+1)(x^c+\dots+x^d)+x^k+\dots+1,$$

где $k_i<m, k<m$. Остаток от деления, $x^k+\dots+1 \not\equiv 0 \pmod{2}$, так как при делении каждого из двучленов (1.7) на (1.5) остаток содержит 1. Двучленов – нечетное число, поэтому суммарный остаток также содержит 1. Таким образом, многочлен (1.6) не делится на многочлен (1.5). Противоречие.

Теорема. Существуют такие начальные условия для первых столбцов направляющих матриц, что последовательность точек $P_i=(p^1(i), \dots, p^n(i))$, построенная по последовательности всех взятых подряд моноциклических операторов, при каждом n обладает свойством А.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Легко проверить, что теорема справедлива до $n=7$ ($m(8)=5$). Пусть она справедлива при некотором $n>7$. Но это означает, что выполняются условия

леммы 2. И если рассмотреть любой моноциклический оператор L_{n+1} , порядок которого такой же, как у L_n , или на единицу больше, то в силу леммы 2 у решения этого оператора найдется начинающийся с 1 участок длины $n+1$, такой, что

$$\begin{vmatrix} 1u_2^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} & u_{n+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} & u_{n+1}^{(n)} \\ 1u_2^{(n+1)} & \dots & u_n^{(n+1)} & u_{n+1}^{(n+1)} \end{vmatrix} = 1 \pmod{2}. \quad (1.8)$$

При этом все угловые определители (1.8) равны 1 (mod 2). Как следует из [2], это доказывает справедливость теоремы при $n+1$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Соболев И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
2. Соболев И.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. – М.: Знание, 1985.

**О РАВНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ИНТЕГРАЛОВ
ТИПА КОШИ С РАЗОМКНУТЫМИ КОНТУРАМИ***

Д. Г. Саникидзе, М.Г. Мирианашвили

Институт вычислительной математики им. Н. И. Мусхелишвили,
г. Тбилиси, Грузия

Значение интегралов типа Коши как фундаментального аппарата в теории функций комплексного переменного хорошо известно. Интегралы типа Коши имеют широкое применение во многих теоретических и прикладных вопросах, в частности, в граничных задачах гармонических и бигармонических функций, к которым, в свою очередь, сводятся задачи конформного отображения областей, задачи плоской теории упругости и т.п. В приложении таких интегралов можно выделить два важных направления. Одно из них связано с задачами, относящимися к решению определенных классов граничных интегральных уравнений, после решения которых основные характеристики исходной задачи (например, компоненты напряжений и смещений в задачах теории упругости) выражаются интегралами типа Коши. Другой класс задач можно отнести к так называемым эффективно решаемым задачам, когда окончательный результат решения задачи более менее непосредственным путем выражается определенной конечной комбинацией значений интегралов типа Коши. Тем самым разработка в том или ином смысле эффективных методов вычисления интегралов типа Коши представляет безусловный интерес. Говоря об этом, в основном речь идет об их приближенных вычислениях. Исходя из сказанного, естественна роль разработки возможно более эффективных методов приближенного вычисления интегралов типа Коши. В настоящей статье будем рассматривать этот вопрос для интегралов типа Коши по отрезкам действительной оси (всюду ниже пишется $[-1, +1]$):

*Работа выполнена при поддержке гранта GNSF/ST08/3-390.

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad z \notin [-1, +1] \quad (1)$$

с определенными весовыми функциями $\rho(t)$, относительно часто встречающимися в приложениях. Разумеется, при фиксированных значениях z к интегралам вида (1) могут быть применены известные ординарные квадратурные формулы. Однако с точки зрения вопросов, связанных с произвольным приближением z к точкам отрезка $[-1, +1]$, такие формулы малоэффективны. С учетом этого здесь предлагается определенная квадратурная схема для (1) другой структуры, основанная на тождестве

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\phi(t)}{t-z} dt = \int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\phi(t)}{t-t_0} dt + (z-t_0) \int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\phi(t)}{(t-t_0)(t-z)} dt, \quad (2)$$

где t_0 – произвольная точка $\in (-1, +1)$, а сингулярные интегралы считаются рассматриваемыми в смысле главного значения по Коши. Обозначим через $\{t_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ и $\{A_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса с данным весом $\rho(t)$. Полагая далее, что $t_0 \in \{t_{oj}\}_{j=1}^{n-1}$, где $\{t_{oj}\}_{j=1}^{n-1}$ – множество нулей соответствующей присоединенной по данному весу $\rho(t)$ функции (см., напр., [1]), приблизим выражение в правой части (2) квадратурной суммой:

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} \left\{ \frac{1}{t_k^{(n)} - t_{oj}} + \frac{z - t_{oj}}{(t_k^{(n)} - t_{oj})(t_k^{(n)} - z)} \right\} \varphi(t_k^{(n)}).$$

Тем самым при каждом $z \notin [-1, +1]$ приближенное равенство

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} \left\{ \frac{1}{t_k^{(n)} - t_{oj}} + \frac{z - t_{oj}}{(t_k^{(n)} - t_{oj})(t_k^{(n)} - z)} \right\} \varphi(t_k^{(n)}) \quad (3)$$

представляет квадратурную формулу Гаусса (ср. с [2,3]) для исходного интеграла типа Коши (1) в указанном множестве $\{t_{oj}\}_{j=1}^{n-1}$ значений па-

раметра t_0 . Если Z стремится к какой-нибудь точке t^* отрезка $[-1, +1]$, то, учитывая наличие множителя $Z - t_{0j}$ в (3), за t_{0j} из указанного множества $\{t_{0j}\}_{j=1}^{n-1}$ предполагается брать одну из наиболее

близких к t^* точку. В связи с вопросом возможного улучшения точности схемы такого типа представляется также приемлемым исходить из того же равенства (2) в форме

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{\rho(t)\varphi(t)}{t-z} dt = \varphi(t_0) \int_{-1}^{+1} \frac{\rho(t)}{t-z} dt + \int_{-1}^{+1} \frac{\rho(t)[\varphi(t) - \varphi(t_0)]}{t-t_0} dt + \\ + (z-t_0) \int_{-1}^{+1} \frac{\rho(t)[\varphi(t) - \varphi(t_0)]}{(t-t_0)(t-z)} dt \end{aligned} \quad (4)$$

с дальнейшим применением к последним двум интегралам вновь формулы типа (3). Очевидно, что реализация основанной на (4) квадратурной формулы требует вычисления независимых от $\varphi(t)$ интегралов

$\int_{-1}^{+1} \frac{\rho(t)}{t-z} dt$ при заданных весовых функциях $\rho(t)$. В ряде частных, но

относительно часто встречающихся случаев такие интегралы могут быть вычислены точно или приближенно с достаточной степенью точности (см., напр., [4,5]). В наиболее простом случае $\rho(t) \equiv 1$ мы имеем

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t-z} = \ln \frac{1-z}{-1-z}, \text{ где в правой части подразумевается ветвь (голо-}$$

морфная на плоскости с разрезом по $[-1, +1]$), исчезающая на бесконечности [6]. Более общими из наиболее часто встречающихся весовых функций являются степенные весовые функции типа Якоби $(1-t)^p(1+t)^q$ ($p, q > -1$). В частности, среди них особо следует выделить весовую функцию Чебышева $(1-t^2)^{-1/2}$.

Библиографический список

1. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.

2. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // В сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений». – М., 1964. –С. 64 – 74.

3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.– Киев: Наукова думка, 1976. – 443 с.

4. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1968. –281 с.

5. Пыхтеев Г.Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши.– Новосибирск: Наука, 1980. –118 с.

6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.– М.: Физматгиз, 1962. –599 с.

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЛАПЛАСОВЫХ ПОЛЕЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА КОШИ

М.В. Кравченко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Среди полей, исследуемых в различных областях физики и техники, особое место занимают потенциальные, и в частности, лапласовы поля. Исследованию потенциальных полей в геофизике посвящены многочисленные работы [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], и сформулированы многие основополагающие результаты. Тем не менее численные методы вычисления потенциальных полей в областях с достаточно сложной границей практически не разработаны. В настоящей работе предлагаются приближенные методы вычисления лапласовых полей, основанные на приближенном вычислении интегралов типа Коши.

Восстановление значений лапласовых полей в области, ограниченной замкнутой выпуклой поверхностью

Рассмотрим лапласово поле U , заданное в области D , ограниченной замкнутой гладкой выпуклой поверхностью S , где $D \in R_3$. Поле U определено векторной функцией $F(r) = \text{grad}U(r) = \{f_1(r), f_2(r), f_3(r)\}$. Значение поля внутри области D определяется значениями функции $F(r)$, заданной на поверхности S области D , по формуле [10]

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (n \cdot F(r)) \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} + [n \times F(r)] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right\} ds = F(r'), \quad (1)$$

где $F = \operatorname{grad} U = \{f_1, f_2, f_3\}$; S – поверхность; $n = \{n_1, n_2, n_3\}$ – единичный вектор внешней нормали к области D ; $r = (x, y, z)$ – точка, пробегающая поверхность S ; $r' = (x', y', z')$ – точка, лежащая внутри области D ;

$g(r, r') = \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} = \{g_1, g_2, g_3\}$ – вектор-функция градиента.

Опишем процесс восстановления лапласова поля, определённого функцией $F(r)$, в области D , ограниченной замкнутой гладкой выпуклой (или звездной с центром O ; затем в этот центр переносится начало координат) поверхностью S .

Так как аналитическое задание поверхности S возможно лишь в редких случаях, аппроксимируем поверхность S кусочно-плоской поверхностью S' , полученной в результате триангуляции области S с использованием пространственной сетки S'' .

Кусочно-плоская поверхность S' состоит из треугольников Δ_i :

$$S' = \bigcup_{i=1}^M \Delta_i, \text{ причём } \operatorname{mes}(\Delta_i \cap \Delta_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, M.$$

Вершинами треугольников кусочно-плоской поверхности S' являются узлы сетки S'' .

Предположим, что S – поверхность, ограничивающая выпуклую область D . Впишем в S сферу $S(0, R)$ максимального радиуса R с центром в точке O , в которую перенесём исходное начало координат.

Проведем триангуляцию сферы $S(0, R)$. Через вершины треугольников триангуляции и начало координат проведем отрезки прямых до пересечения их с поверхностью S .

Точки пересечения обозначим через $P_i, i = 1, 2, \dots, N$. Используя данные точки, проведём триангуляцию поверхности S .

Для простоты дальнейших рассуждений рассмотрим в качестве поверхности S сферу $S(0, R)$ с центром в начале декартовой системы координат и радиусом R . Триангуляцию заданной поверхности можно произвести различными способами [11]. Однако наиболее простым и естественным представляется триангуляция «по меридианам и параллелям». Будем

пользоваться сферической системой координат. Зададим сетку узлов S'' на поверхности S ($r = R$) следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_k &= \frac{\pi}{N_{\tilde{\theta}}} k, k = 0, \dots, N_{\tilde{\theta}}, \\ \tilde{\varphi}_l &= \frac{2\pi}{N_{\tilde{\varphi}}} l, l = 0, 1, \dots, N_{\tilde{\varphi}},\end{aligned}$$

где $N_{\tilde{\theta}}$ и $N_{\tilde{\varphi}}$ – параметры, определяющие число участков разбиения поверхности по переменным $\tilde{\theta}$ и по $\tilde{\varphi}$ соответственно. В результате получим множество областей $[R; \tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_{i+1}; \tilde{\varphi}_j, \tilde{\varphi}_{j+1}]$, $i = 1..N_{\tilde{\theta}} - 2$, $j = 1..N_{\tilde{\varphi}} - 2$ и $2N_{\tilde{\varphi}}$ сферических треугольников у полюсов. Каждую из данных областей можно представить в качестве объединения двух сферических треугольников. Таким образом, проведя через полученные вершины сферических треугольников плоскости, получим кусочно-плоскую поверхность S' , состоящую из $M = 2N_{\tilde{\varphi}}(N_{\tilde{\theta}} - 1)$ треугольников.

Значение лапласова поля F в любой точке $r' = (x', y', z') \in D$ можно найти, вычисляя интеграл в левой части (1) по кубатурной формуле

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (n \cdot F(r)) \text{grad} \frac{1}{|r - r'|} + [n \times F(r)] \times \text{grad} \frac{1}{|r - r'|} \right\} ds = \\& = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \iint_{\Delta_j} \left\{ (n^j \cdot F(r)) \text{grad} \frac{1}{|r - r'|} + [n^j \times F(r)] \times \text{grad} \frac{1}{|r - r'|} \right\} ds = \\& = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \left\{ (n^j F(r_c^j)) \text{grad} \frac{1}{|r_c^j - r'|} + [n^j \times F(r_c^j)] \times \text{grad} \frac{1}{|r_c^j - r'|} \right\} S_{\Delta_j} + \\& + R_M(F) = F(r'),\end{aligned} \quad (2)$$

где $R_M(F)$ – погрешность кубатурной формулы; n^j – единичный вектор внешней нормали к j -тому треугольнику, составляющему поверхность S' ; $r_c^j = (x_c^j, y_c^j, z_c^j)$ – центральная точка j -того треугольника; $F(r_c^j)$ – значе-

ние лапласова поля в центральной точке j -того треугольника; S_{Δ_j} – площадь j -того треугольника.

Воспользовавшись формулой

$$[a \times b] \times c = b(a \cdot c) - a(b \cdot c)$$

и учитывая, что вектор-функции, входящие в формулу (2), состоят из трёх компонент, формула (2) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} f_i(r') = & -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \left\{ \left(n_1^j f_1(r_c^j) + n_2^j f_2(r_c^j) + n_3^j f_3(r_c^j) \right) g_i(r_c^j, r') + \right. \\ & + f_i(r_c^j) \left(n_1^j g_1(r_c^j, r') + n_2^j g_2(r_c^j, r') + n_3^j g_3(r_c^j, r') \right) - \\ & \left. - n_i^j \left(f_1(r_c^j) g_1(r_c^j, r') + f_2(r_c^j) g_2(r_c^j, r') + f_3(r_c^j) g_3(r_c^j, r') \right) \right\} S_{\Delta_j} + R_{M,i}(F), \end{aligned} \quad (3)$$

$i = 1, 2, 3$.

Опишем ещё одну кубатурную формулу. Пусть S сфера с центром в начале координат и радиусом R . Тогда

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (n \cdot F(r)) \operatorname{grad} \frac{1}{|r - r'|} + [n \times F(r)] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r - r'|} \right\} ds = F(r') = \\ & = -\frac{R^2}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ (n \cdot F(r)) \operatorname{grad} \frac{1}{|r - r'|} + [n \times F(r)] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r - r'|} \right\} \sin \theta d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Кубатурная формула в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} f_i(t') = & -\frac{R^2}{4\pi} \sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{j=0}^{\tilde{N}-1} ([n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3]_{t_{cp}} \cdot g_i(t_{cp}, t') + f_i(t_{cp}) [n_1(t_{cp}) g_1(t_{cp}, t') + \\ & + n_2(t_{cp}) g_2(t_{cp}, t') + n_3(t_{cp}) g_3(t_{cp}, t')] - n_i(t_{cp}) [f_1(t_{cp}) g_1(t_{cp}, t') + f_2(t_{cp}) g_2(t_{cp}, t') + \\ & + f_3(t_{cp}) g_3(t_{cp}, t')] (\cos \theta_k - \cos \theta_{k+1}) (\varphi_{j+1} - \varphi_j) + R_{\tilde{N},i}(F), \end{aligned} \quad (4)$$

где $R_{\tilde{N},i}(F)$ – погрешность кубатурной формулы; t' – точка, лежащая внутри сферы;

$$\theta_k = \frac{\pi}{\tilde{N}} k, k = 0, 1, \dots, \tilde{N},$$

$$\varphi_j = \frac{2\pi}{\tilde{N}} j, j = 0, 1, \dots, \tilde{N},$$

$$t_{cp} = (\theta_{cp}^k, \varphi_{cp}^j), \theta_{cp}^k = \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2}, \varphi_{cp}^j = \frac{\varphi_j + \varphi_{j+1}}{2},$$

$$n_1 = \sin \theta \cos \varphi; n_2 = \sin \theta \sin \varphi; n_3 = \cos \varphi.$$

Формулы (3) и (4) показывают хорошую точность при достаточно большом числе элементов покрытия. Результаты тестирования данных формул, где S – сфера с центром в начале координат и радиусом R , приведены в табл. 1. Для восстановления лапласова поля, представленного выражением (2), можно составить более точные кубатурные формулы.

Триангулируем поверхность S таким образом, как описано выше. Тогда значение лапласова поля в области D можно найти по следующей кубатурной формуле:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (n \cdot F(r)) \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} + [n \times F(r)] \times \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right\} ds = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \iint_{\Delta_j} \left\{ (n \cdot F(r)) \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} + [n \times F(r)] \times \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right\} ds = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \left\{ (n^j F(r_c^j)) \iint_{\Delta_j} \text{grad} \frac{ds}{|r-r'|} + [n^j \times F(r_c^j)] \times \iint_{\Delta_j} \text{grad} \frac{ds}{|r-r'|} \right\} + \\ & + R_M(F) = F(r') \end{aligned} \quad (5)$$

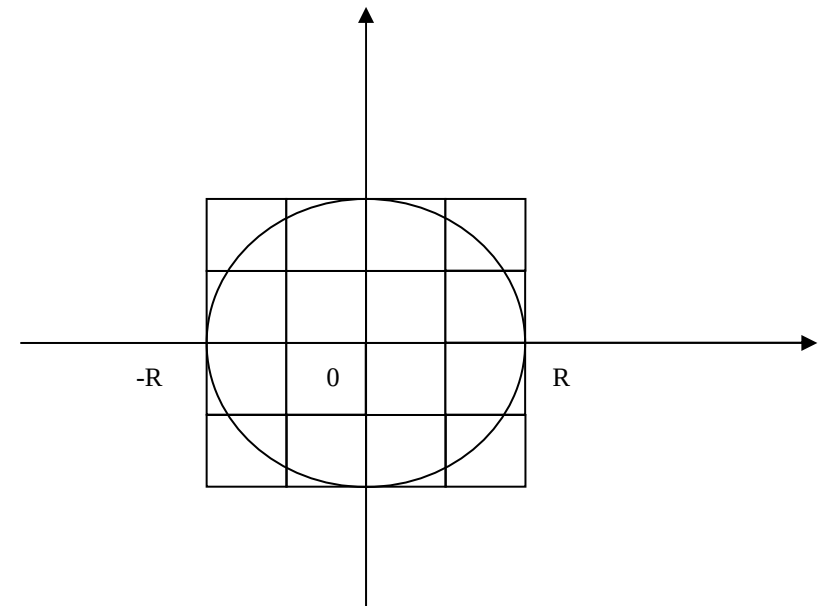
Учитывая, что вектор-функции, входящие в формулу (5), состоят из трёх компонент, формула (5) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} f_i(r') = & -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \left\{ \left(n_1^j f_1(r_c^j) + n_2^j f_2(r_c^j) + n_3^j f_3(r_c^j) \right) \bar{g}_i(j, r') + \right. \\ & + f_i(r_c^j) \left(n_1^j \bar{g}_1(j, r') + n_2^j \bar{g}_2(j, r') + n_3^j \bar{g}_3(j, r') \right) - \\ & \left. - n_i^j \left(f_1(r_c^j) \bar{g}_1(j, r') + f_2(r_c^j) \bar{g}_2(j, r') + f_3(r_c^j) \bar{g}_3(j, r') \right) \right\} + R_{M,i}(F), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \bar{g}_i(j, r') = \iint_{\Delta_j} \text{grad} \frac{1}{|r-r'|} ds.$$

В случае аналитически заданной поверхности $z = \varphi(x, y)$, помимо формулы (6), для вычисления интеграла (2) можно воспользоваться следующим методом.

Рассмотрим область D_{xoy} , полученную сечением области D плоскостью XOY. В случае отсутствия такого сечения проведем параллельный перенос поверхности в начало координат. Найдем минимальное и максимальное значение координат границы области. «Опишем» вокруг полученной границы прямоугольник. Произведем разбиение полученного прямоугольника более мелкими прямоугольниками таким образом, как изображено на рисунке в случае рассмотрения сферы с центром в начале координат и радиусом R .



Из получившихся прямоугольников выберем только те, которые имеют с областью D_{xoy} более одной общей точки. Пронумеруем их и обозначим $\square_j, j = 0, 1, \dots, m$. Для каждого из указанных прямоугольников укажем вершины и найдем среднюю точку. В случае принадлежности области D_{xoy} всех четырех вершин прямоугольника это будет сред-

нее арифметическое всех его вершин, в противном случае за среднюю возьмем точку, одновременно лежащую в области $D_{хоу}$ и в указанном прямоугольнике и не принадлежащую границе этих областей. Вершины и среднюю точку каждого прямоугольника спроецируем на поверхность S . Таким образом мы получим $M=2m$ сферических прямоугольников, покрывающих поверхность S , для каждого из которых найдена средняя точка. Таким образом, i -тому прямоугольнику области $D_{хоу}$ соответствуют 2 сферических прямоугольника на поверхности S . Вектор нормали к средней точке T_i каждого сферического прямоугольника на поверхности опреде-

ляется как $\left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{T_i}, \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{T_i}, \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{T_i} \right\}$, где $F(x, y, z) = 0$ – неявное уравнение поверхности.

Значение лапласова поля в области D будем искать по следующей кубатурной формуле:

$$\begin{aligned} f_i(r') = & -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^m \left\{ \left(n_1^j f_1(r_c^j) + n_2^j f_2(r_c^j) + n_3^j f_3(r_c^j) \right) \bar{g}_i(j, r') + \right. \\ & + f_i(r_c^j) \left(n_1^j \bar{g}_1(j, r') + n_2^j \bar{g}_2(j, r') + n_3^j \bar{g}_3(j, r') \right) - \\ & \left. - n_i^j \left(f_1(r_c^j) \bar{g}_1(j, r') + f_2(r_c^j) \bar{g}_2(j, r') + f_3(r_c^j) \bar{g}_3(j, r') \right) \right\}_+ + \\ & + \left\{ \left(n_1^j f_1(r_c^j) + n_2^j f_2(r_c^j) + n_3^j f_3(r_c^j) \right) + \right. \\ & + f_i(r_c^j) \left(n_1^j \bar{g}_1(j, r') + n_2^j \bar{g}_2(j, r') + n_3^j \bar{g}_3(j, r') \right) - \\ & \left. - n_i^j \left(f_1(r_c^j) \bar{g}_1(j, r') + f_2(r_c^j) \bar{g}_2(j, r') + f_3(r_c^j) \bar{g}_3(j, r') \right) \right\}_- + R_{M,i}, \quad i=1, 2, 3, \end{aligned} \quad (7)$$

где знаки $\left\{ \right\}_+$, $\left\{ \right\}_-$ означают, что сферический прямоугольник с номером j находится в области $z \in [0, +\infty)$ и $z \in (-\infty, 0]$ соответственно;

$$\bar{g}_i(j, r') = \iint_{\square_j} \text{grad} \frac{1}{|r - r'|} ds, \quad \square_j - \text{сферический прямоугольник}, \quad R_{M,i} -$$

погрешность кубатурной формулы.

Результаты восстановления лапласова поля по формулам (6) и (7) приведены в табл. 2.

Вычисление интегралов типа Коши с особой точкой на поверхности интегрирования

Многие задачи геофизики сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений с интегралами типа Коши. При этом возникает необходимость в вычислении интегралов типа Коши, у которых особая точка лежит на поверхности интегрирования. Рассмотрим интеграл

$$-\frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ (n \cdot F(r)) \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} + [n \times F(r)] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right\} ds = \Phi(r'),$$

в котором точка $r' = (x', y', z')$ лежит на поверхности S .

Отметим, что согласно теореме [10, с. 138], если $\Phi(r)$ есть краевое значение некоторого лапласова в D векторного поля, то имеем $F(r') = \Phi(r'), r' \in S$. Во всех других случаях $F(r') \neq \Phi(r')$.

Опишем формулы для вычисления указанного интеграла.

Триангулируем поверхность S таким образом, как вначале. Пусть точка $r' = (x', y', z') \in \Delta_p$. Тогда значение функции $\Phi(r')$ на поверхности S можно найти по следующей кубатурной формуле:

$$\begin{aligned} \varphi_i(r') = & -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1, \\ j \triangleleft p}}^M \left\{ \left(n_1^j f_1(r_c^j) + n_2^j f_2(r_c^j) + n_3^j f_3(r_c^j) \right) \bar{g}_i(j, r') + \right. \\ & + f_i(r_c^j) \left(n_1^j \bar{g}_1(j, r') + n_2^j \bar{g}_2(j, r') + n_3^j \bar{g}_3(j, r') \right) - \\ & \left. - n_i^j \left(f_1(r_c^j) \bar{g}_1(j, r') + f_2(r_c^j) \bar{g}_2(j, r') + f_3(r_c^j) \bar{g}_3(j, r') \right) \right\} + R_{M,i}, \quad i=1,2,3, \end{aligned} \quad (8)$$

где $R_{M,i}$ – погрешность кубатурной формулы,

$$\bar{g}_i(j, r') = \iint_{\Delta_j} \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} ds.$$

Также можно воспользоваться кубатурной формулой, основанной на методе, описанном для формулы (7). Пусть $r' = (x', y', z') \in \square_{p_+}$. Принадлежность точки сферическому прямоугольнику $\square_{p_+}$ говорит о том, что точка принадлежит сферическому прямоугольнику с номером p , лежащему в области $z \in [0, +\infty)$. Аналогично принадлежность точки сферическому

му прямоугольнику $\square_{p_-}$ говорит о том, что точка принадлежит сферическому прямоугольнику с номером p , лежащему в области $z \in (-\infty, 0]$.

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_i(r') = & -\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{\substack{j=1, \\ j \triangleright p}}^m \left\{ \left(n_1^j f_1(r_c^j) + n_2^j f_2(r_c^j) + n_3^j f_3(r_c^j) \right) \bar{g}_i(j, r') + \right. \right. \\ & + f_i(r_c^j) \left(n_1^j \bar{g}_1(j, r') + n_2^j \bar{g}_2(j, r') + n_3^j \bar{g}_3(j, r') \right) - \\ & \left. \left. - n_i^j \left(f_1(r_c^j) \bar{g}_1(j, r') + f_2(r_c^j) \bar{g}_2(j, r') + f_3(r_c^j) \bar{g}_3(j, r') \right) \right\} \right)_+ + \\ & + \sum_{j=1}^m \left\{ \left(n_1^j f_1(r_c^j) + n_2^j f_2(r_c^j) + n_3^j f_3(r_c^j) \right) + \right. \\ & + f_i(r_c^j) \left(n_1^j \bar{g}_1(j, r') + n_2^j \bar{g}_2(j, r') + n_3^j \bar{g}_3(j, r') \right) - \\ & \left. \left. - n_i^j \left(f_1(r_c^j) \bar{g}_1(j, r') + f_2(r_c^j) \bar{g}_2(j, r') + f_3(r_c^j) \bar{g}_3(j, r') \right) \right\} \right)_-, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичным образом можно записать формулу в случае $r' = (x', y', z') \in \square_{p_-}$.

Тестирование формулы (8) приведено в табл. 3.

Модельная задача

Введем декартову систему координат $OXYZ$. Пусть в точке с координатами $(3, 3, 3)$ находится точечное тело с массой $\mu = 100$, создающее лапласово поле $U(x, y, z)$.

Введем сферическую систему координат (ρ, θ, φ) с полюсом в начале декартовой системы координат. Пусть лапласово поле $U(x, y, z)$ известно на поверхности сферы радиуса $R = 0,5$ и равно

$$U(x, y, z) = \frac{100}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2}}.$$

Требуется восстановить значения поля в области D и на поверхности сферы S . Результаты приведены в табл. 1 – 3.

Таблица 1

Восстановление значений лапласова поля по формулам (3) и (4)

М	(3)		(4)	
	максимальная абсолютная погрешность	максимальная относительная погрешность, %	максимальная абсолютная погрешность	максимальная относительная погрешность, %
1200	1.96939168763664E-0001	8.74282892795437E+0000	1.10896369845699E-0001	4.47218325519853E+0000
1740	1.12902151403966E-0001	4.66659123687869E+0000	6.62737548801970E-0002	2.69208487055073E+0000
2380	9.59468747275124E-0002	4.25925254225678E+0000	4.81712891835099E-0002	2.10482363643515E+0000
3120	6.71484384573734E-0002	2.83116165339619E+0000	2.59377505091306E-0002	1.04591786803145E+0000

Таблица 2

Восстановление значений лапласова поля по формулам (6) и (7)

М	n	(6)		(7)	
		максимальная абсолютная погрешность	максимальная относительная погрешность, %	максимальная абсолютная погрешность	максимальная относительная погрешность, %
364	30	9.41656754534003E-0002	3.79715127868516E+0000	1.64260281575047E-0001	3.03326814695332E+0000
	40	8.78941720399924E-0002	3.67379902640368E+0000	5.68454359965272E-0002	2.79187225274273E+0000
	50	6.55365939497693E-0002	3.11926162175370E+0000	6.51407143264242E-0002	2.55012916075335E+0000
	60	4.60419672597982E-0002	1.85660341745481E+0000	3.36606400031827E-0002	1.52223813472622E+0000
480	30	8.73876262935018E-0002	3.52383217476989E+0000	6.40835976069340E-0002	2.94142582758884E+0000
	40	8.28314953351466E-0002	3.34585371274601E+0000	5.37810015501125E-0002	2.60372686681365E+0000
	50	5.25001175075904E-0002	2.71570289410392E+0000	5.97447184756150E-0002	2.26198513299296E+0000
	60	4.27843502084451E-0002	1.72524276302894E+0000	2.84211974941601E-0002	1.23590722156968E+0000

Таблица 3

Восстановление значений лапласова поля на поверхности по формуле (8)

М	n	максимальная абсолютная погрешность	максимальная относительная погрешность, %
180	30	1.29270975292902E-0001	6.70403659541609E+0000
	40	1.28434255285892E-0001	6.62223216066547E+0000
	50	1.22504310335829E-0001	6.01444287992806E+0000
	60	1.02547038705654E-0001	5.61781604368308E+0000
	70	1.01145023040809E-0001	5.49556029723383E+0000
364	30	1.27058899075910E-0001	6.17733244521169E+0000
	40	1.21766445832321E-0001	6.07895409884321E+0000
	50	1.19016840938528E-0001	5.79453601717681E+0000
	60	1.13574019928343E-0001	5.40563767873410E+0000
	70	1.11085435419566E-0001	5.16152082917673E+0000
480	30	1.21142194937169E-0001	4.58654506904835E+0000
	40	1.01420561252928E-0001	3.92801103452347E+0000
	50	7.92789289198281E-0002	3.28853194786648E+0000
	60	7.2866236438711E-0002	2.75877669867841E+0000
	70	6.67551775226544E-0002	2.69184611556725E+0000

Библиографический список

1. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. – М.-Л.: Гос-техиздат, 1946. – 322 с.
2. Сретенский Л.Н. Об одной обратной задаче теории потенциала // Изв. АН СССР. Сер. матем, 1938. – Т. 2. – Вып. 5-6. – С 551 – 570.
3. Иванов В.К. Исследования по обратной задаче потенциала: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук / АН СССР. Матем. ин-т им. В.А. Стеклова. – М., 1955.
4. Иванов В.К. Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956. – Т. 20, 6. – С. 793 – 818.
5. Иванов В.К. Распределение особенностей потенциала и пространственный аналог теоремы Поля // Матем. сб., 1956. – Т. 40. – Вып. 3. – С. 319 – 338.
6. Страхов В.Н. Третья парадигма в теории и практике интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий). Ч. I // Вестн. ОГГГГН РАН. – 1997. – №1(1). – С. 163 – 198.

7. Страхов В. Н. Третья парадигма в теории и практике интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий). Ч. II // Вестн. ОГТГН РАН. – 1997. – №2(2). – С. 55 – 82.
8. Бойков И.В., Бойкова А.И. Оптимальные методы восстановления потенциальных полей // Известия РАН. Физика Земли. – 1998. – №8. – С. 70 – 78.
9. Бойков И.В., Бойкова А.И. Оптимальные по точности методы восстановления потенциальных полей // Известия РАН. Физика Земли. – 2003. – №3. С. 87 – 93.
10. Жданов М.С. Аналогии интеграла типа Коши в теории геофизических полей. – М: Наука, 1984. – 327 с.
11. Роджерс К. Укладки и покрытия. – М.: Мир, 1968. – 134 с.

НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

И.В. Бойков, Е.В. Кучумов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В метрологии и геофизике возникает задача нахождения экстремальных значений гармонических функций, определенных в выпуклых областях, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями. Ниже предлагается алгоритм решения таких задач, основанный на сведении функций многих переменных к функциям одной переменной.

Изложим алгоритм на примере функции трёх переменных, что является актуальным при рассмотрении геофизических полей.

Пусть гармоническая функция $u(x_1, x_2, x_3)$ задана в односвязной области Ω , ограниченной гладкой поверхностью $\Gamma = \partial\Omega$. Так как функция $u(x_1, x_2, x_3)$ гармоническая в ограниченной односвязной, замкнутой области, то её экстремальные значения находятся на границе Γ области Ω .

Поместим начало координат во внутреннюю точку области Ω и введем сферическую систему координат (r, φ, ψ) . Считаем, что каждая точка поверхности Γ определена координатами $(r(\varphi, \psi), \varphi, \psi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Удобно считать, что переменные φ и ψ изменяются в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$. При этом каждая точка поверхности пробегается дважды, но для нахождения экстремальных значений функции, определённой на поверхности Γ , это не имеет значения.

Таким образом, задача сводится к нахождению экстремальных значений функции $u(r(\varphi, \psi), \varphi, \psi) = u(r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \varphi)$, определённой в квадрате $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Разложим функцию $u(r(\varphi, \psi), \varphi, \psi)$ в ряд Фурье по тригонометрической системе

$$u_*(r(\varphi, \psi), \varphi, \psi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{kl} e^{i(k\varphi + l\psi)}. \quad (1)$$

В предположении, что функция $u(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет условию Гельдера $H_\alpha(A)$, а поверхность Γ является поверхностью Ляпунова $H(0, A, \alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, справедливо равенство (1).

Пусть $p_1 \neq p_2$ и $p_1 < p_2$ — простые числа. Тогда полагая $\varphi = p_1 t$, $\psi = p_2 t$ и подставляя эти значения в (1), имеем:

$$u_{**}(t) = u_*(r(\varphi(t), \psi(t)), \varphi(t), \psi(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{kl} e^{i(kp_1 + lp_2)t}.$$

Используем функцию $u_{**}(t)$ для нахождения экстремальных значений функции $u(x, y, z)$ в области Ω . Для определенности ограничимся нахождением минимальных значений функции $u(x, y, z)$.

Предположим, что функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) функция $u(x, y, z)$ в области Ω имеет единственный минимум;
- 2) функция $u(x, y, z)$ имеет в области Ω конечное число локальных минимумов, причем разность между значениями двух любых локальных минимумов не меньше d ($d > 0$).

Вначале рассмотрим вопрос нахождения глобального минимума функции $u(x, y, z)$. Для этого выберем простые числа p_1 и p_2 таким образом, чтобы $A | p_2 - p_1 | / (2p_2) = \varepsilon < d/2$. Здесь ε — точность, с которой требуется найти минимум функции $u(x, y, z)$ в области Ω .

Найдем минимум функции $u_{**}(t)$ при $0 \leq t \leq 2\pi$. За время, в течение которого переменная t пробегает сегмент $[0, 2\pi]$, точка $(\varphi(t), \psi(t))$ $p(p = \max(p_1, p_2))$ раз пересекает квадрат $[0, 2\pi]^2$, и, следовательно, точка $(r(\varphi(t), \psi(t)), \varphi(t), \psi(t))$ описывает p различных кривых на поверхности Γ . Для нахождения минимума функции $u_{**}(t)$ можно использовать стандартные методы [1]. Пусть минимальное значение функции $u_{**}(t)$ достигается в точке t_* . Предположим, что точка t_* изолированная.

Обозначим через (x_*, y_*, z_*) точку в области Ω , в которой функция $u(x, y, z)$ достигает минимума. Пусть $M = \min_{(x, y, z) \in \Omega} u(x, y, z) = u(x_*, y_*, z_*)$.

Оценим погрешность предложенного выше алгоритма при локализации точки (x_*, y_*, z_*) и при оценке значения M .

Пусть в сферической системе координат точке x_*, y_*, z_* отвечают координаты $(r(\varphi_*, \psi_*) \varphi_*, \psi_*)$, а точке t_* – координаты $(r(\bar{\varphi}, \bar{\psi}), \bar{\varphi}, \bar{\psi})$.

Нетрудно видеть, что в $(p_2 - p_1)/p_2$ окрестности точки (φ_*, ψ_*) имеются точки, лежащие на отрезках прямых $\varphi = p_1 t, \psi = p_2 t$. Значения функции $u_{**}(t)$ на отрезках прямых $\varphi = p_1 t, \psi = p_2 t$, лежащих в $(p_2 - p_1)/p_2$ окрестности точки (x_*, y_*, z_*) , меньше $M + \varepsilon$. Следовательно, точка t_* лежит на отрезках прямых $\varphi = p_1 t, \psi = p_2 t$ в $(p_2 - p_1)/p_2$ окрестности точки (x_*, y_*, z_*) . Таким образом, минимальное значение (x_*, y_*, z_*) локализовано с точностью $(p_2 - p_1)/p_2$, а минимум определен с точностью ε .

Аналогичным образом вычисляются локальные минимумы.

Взяв несколько наборов простых чисел p_1^i и $p_2^i, i = 1, 2, \dots$, можно построить параллельные алгоритмы нахождения экстремальных точек t_*^i функций $u_{**}^i(t)$. Экстремальная точка (x_*, y_*, z_*) лежит в пересечении $|p_2^i - p_1^i|/p^i$ окрестностей точек $t_*^i, i = 1, 2, \dots$. Здесь $p^i = \max_{i=1,2}(p_1^i, p_2^i)$.

Библиографический список

1. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистические алгоритмы). – М.: Наука, 1978. – 240 с.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, ДЕМОГРАФИИ, СОЦИАЛЬНЫХ НАУК

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ

Ю.Ф. Захарова, А.Н.Смекалина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В 1938 г. Ральф Эллиот предложил теорию прогнозирования поведения цен на акции, которая была основана на использовании теории фракталов.

Фрактал – это геометрическая фигура, определенная часть которой повторяется снова и снова; отсюда проявляется одно из свойств фрактала – самоподобие. Другое его свойство – дробность. Дробность фрактала является математическим отражением меры его неправильности.

Эллиот исходил из того, что геометрия фракталов имеет место быть не только в живой природе, но и в общественных процессах. К общественным процессам он относил и торговлю акциями на бирже. Согласно основным постулатам Эллиотта, структура рынка имеет волнообразный характер, позволяющий спрогнозировать дальнейшее развитие ситуации. Волной он называл направленное движение цен в одну сторону.

Развивая данную теорию, Эллиот отталкивается от того, что всякое колебание рыночных цен складывается из пяти волн, идущих в направлении основного тренда (рис.1, волны 1-5), и трех волн, идущих в обратном направлении (рис.1, волны А, В, С). Таким образом, полный цикл рынка состоит из 8 волн: 5 волн роста и 3 волны падения при бычьем рынке (имеющем динамичные движения и реакции как вверх, так и вниз) или наоборот: 5 волн падения и 3 волны роста при медвежьем рынке (отсутствие резких изменений котировок и цен).

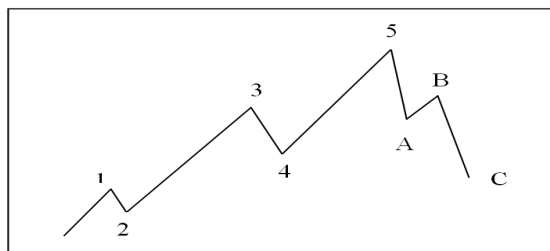


Рис.1. Волновая диаграмма Эллиота

Волны Эллиота, придающие значительную динамику рынку, называются «импульсными» волнами, потому что они идут по направлению основного тренда, придавая ему импульс (рис.1, волны 1, 3, 5, А, С). Волны отката – это «корректирующие» волны, потому что они идут в противоположном по сравнению с импульсными волнами направлении (рис.1, волны 2, 4, В).

Эллиот был одним из первых, кто четко определил действие геометрии фракталов в ценовом графике. Он предположил, что в каждой из импульсных и корректирующих волн также представляет собой волновую диаграмму Эллиота. В свою очередь, те волны тоже можно разложить на составляющие, и так далее (рис.2). При этом каждая волна импульса состоит из пяти меньших волн, а каждая волна корректировки – из трех, и чем интенсивнее импульсная волна, тем более сильная следующая за ней волна коррекции, и наоборот.

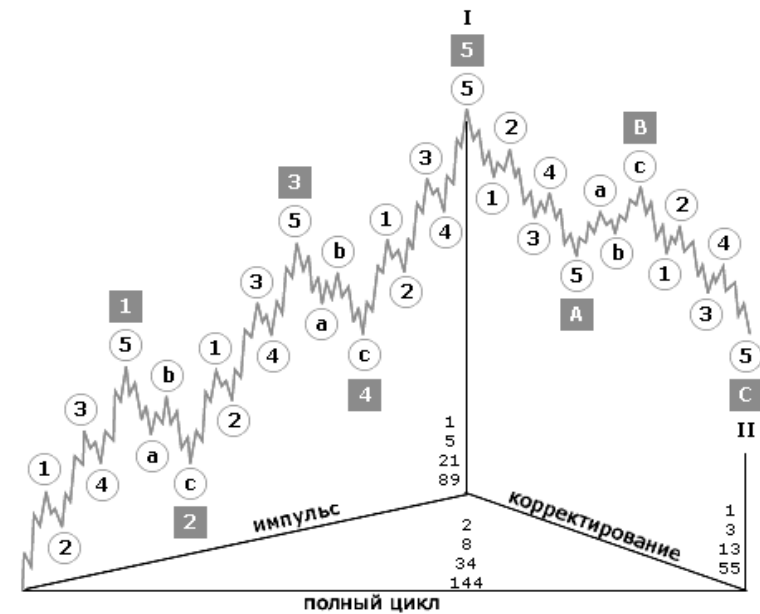


Рис.2. Импульсные и корректирующие волны различных степеней

Таким образом, Эллиот применил теорию фракталов для разложения тренда на более мелкие и понятные части. Знание этих частей в масштабе, более мелком, чем самая большая волновая диаграмма, достаточно важно, потому что трейдеры (участники финансового рынка),

зная, в какой части диаграммы они находятся, могут уверенно продавать ценные бумаги, когда начинается коррективная волна, и должны покупать их, когда начинается импульсная волна.

При построении конкретной модели необходимо учитывать четыре правила Эллиота, устанавливающие взаимное поведение волн (если нарушение первых трех ведет к пересмотру всего прогноза, то последнее носит характер совета), а также набор характеристик для каждой волны. Длину каждой волны и время ее завершения можно прогнозировать с помощью чисел и коэффициентов Фибоначчи. Более подробно этот процесс описан в дипломной работе А.Н. Смекалиной.

В рамках данной работы также был реализован алгоритм, выполняющий построение и анализ 8-волнового и 34-волнового циклов Эллиота. При построении вычислительных схем необходимых алгоритмов был использован язык программирования высокого уровня Builder C++ и программный пакет Maple. Данный алгоритм может быть использован для анализа планирования торговли, в частности, прогнозирования колебания курса валют на бирже.

Библиографический список

1. Вильямс Б. Торговый хаос. Экспертные методики максимизации прибыли. – М.: ИК «Аналитика», 2000. – 328 с.
2. Вильямс Б. Новые измерения в биржевой торговле. Как извлечь прибыли из Хаоса: рынки акций, облигаций и фьючеров. – М.: ИК «Аналитика», 2000. – 288 с.
3. Волновая Теория Эллиота [Интернет-ресурс]: <http://forex.ac.com/va/volnovoy-analiz>.
4. Теория хаоса [Интернет-ресурс]: <http://www.unmask.ru/trash/haos.html>.
5. Эрик Найман Теория Хаоса [Интернет-ресурс]: <http://www.marketadvisor.ru/books/chaos-theory-eric-nayman.html>.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ОБУВИ

Е.Н. Берникова, Е.А. Амосов

Самарский государственный технический университет,
г. Самара, Россия

При эксплуатации любая обувь подвергается циклическому воздействию. Проведенные нами исследования показали, что за один день житель города, не пользующийся автомобилем, проходит пять-семь тысяч шагов. Известно, что через 5-7 месяцев эксплуатации обуви в ней возни-

кают видимые необратимые изменения (трещины, складки). За указанный период времени (с учетом того, что в день человек проходит порядка 6000 шагов) обувь испытывает примерно

$$N \sim 30 \cdot 6000 \cdot 6 \sim 10^6$$

циклов воздействия. Известно, что в металле после $10^6 \dots 10^7$ циклов воздействия возникают усталостные трещины и другие заметные изменения структуры. Поэтому будем считать, что разрушение обуви при эксплуатации происходит так же, как и разрушение образца из металла за счет циклического воздействия.

Изобразим циклическое воздействие на образец в координатах «напряжение – деформация» следующим образом (рис. 1). Как известно из литературы, при механическом воздействии образуется характерная петля гистерезиса. Площадь этой петли равна энергии, которую поглощает единица объема образца при каждом цикле внешнего воздействия.

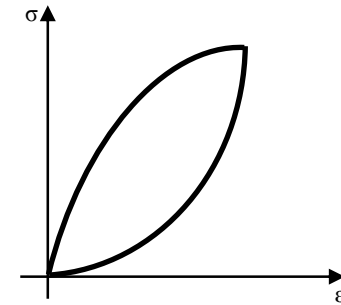


Рис. 1. Зависимость между напряжением в образце и его деформацией

Часть поглощенной энергии рассеивается, а часть концентрируется в определенных местах. Такими местами могут быть поры, неоднородности структуры, раковины на поверхности, трещины и т.д. Если образец – тапочка, то таким местом концентрации напряжений может быть, например, место соединения верхней части обуви с подошвой, в частности, углубление, образующееся в месте этого соединения.

Определим теперь, вероятность отрыва какой части подошвы (передней или задней) является более высокой при эксплуатации обувного изделия. Для этого рассмотрим более подробно процесс шага, разбив его на отдельные участки – фазы шага.

Согласно литературным данным, шаг человека состоит из четырех фаз: перенос ноги, пережат через пятку, опора на всю стопу, пережат через пальцы. Самыми длительными являются процессы опоры на всю стопу

(25% от продолжительности шага) и пережат через пальцы (25% от продолжительности шага), пережат через пятку занимает гораздо меньше времени (10% от продолжительности шага).

Рассмотрим более подробно оба указанных процесса. Пережат через пальцы приводит к изгибу подошвы и всего изделия, в то время как опора на всю стопу приводит к равномерному сжатию подошвы.



Рис. 2. Моделирование деформации при разных фазах шага

Так как изгиб является совокупностью сжатия и растяжения, а растяжение, как известно, оказывает более сильное разрушающее воздействие, то, следовательно, можно ожидать, что разрушение передней части тапочки будет происходить чаще.

Оценим нагрузку на образец, возникающую при ходьбе. Полагая массу человека равной $m=80$ кг, $g=10$ м/с², а площадь контакта пола и тапки $S \sim 10^{-3}$ м², получаем, что напряжение при сжатии составляет $\sigma \sim (mg)/S \sim 8 \cdot 10^5$ Па ~ 1 МПа.

При изгибе возникает напряжение порядка произведения модуля сдвига G и деформации $\epsilon = \tan \phi$ (здесь ϕ – угол изгиба), т.е.

$$\sigma \sim G\epsilon.$$

Полагая для полимера $G \sim 10^6$ Па, $\phi \sim 30^\circ$, $\epsilon \sim 1$, получаем, что при изгибе возникает напряжение $\sigma \sim 1$ МПа.

Таким образом, нагрузка на обувь составляет величину порядка МПа за один цикл. В принципе, это немного, но при большом числе циклов воздействия образец поглотит достаточное большое количество механической энергии.

Обратим также внимание, что при изгибе тапочки в области изгиба будет область неупругой деформации, т. е. деформации, сопровождающейся поглощением энергии. Энергия, поглощенная за счет неупругости материала, должна скапливаться у какого-то концентратора энергии. Так как расстояние от области изгиба до концентраторов энергии в передней части тапочки меньше, то, следовательно, можно ожидать, что поглощенная за один цикл энергия воздействия будет концентрироваться именно в передней части тапочки, что и приведет в конце концов к рождению трещины (например, в месте склейки) и последующему разрушению обуви.

Библиографический список

1. Иванов А.И. Конструкционная прочность. – М.: Машиностроение–1, 2005. – 368 с.
2. Ковалев А.Л., Горбачик В.Е. Влияние изгибной жесткости обуви на биомеханические параметры ходьбы // Стопа и вопросы построения рациональной обуви. – М.: ЦИТО, 1980. – С. 34 – 36.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Э.К. Самарханова

Волжский государственный инженерно-педагогический университет,
г. Нижний Новгород, Россия

Сегодня как никогда мы понимаем необходимость использования математических знаний в нашей жизни и профессиональной деятельности. Практически во всех науках о природе, обществе построение и использование моделей является мощным орудием познания. Большинство объектов, изучаемых в экологических исследованиях, опирается на определённую математическую модель. Под математическими моделями будем понимать систему математических соотношений, описывающих изучаемый процесс или явление с помощью математических символов, представляющих собой совокупность уравнений, неравенств, формул, программ, в состав которых входят константы и переменные величины, а также различные математические операции и понятия. Если математическая модель неадекватна свойствам изучаемой системы, то результаты анализа будут сильно, а иногда принципиально искажать реальность. Это условное понятие, так как полного соответствия модели реальному объекту быть не может.

Математические модели образуют тот класс, в котором рассматривают количественные характеристики и пространственно-структурные особенности реально существующих задач. На сегодняшний день имеется большое количество различных классификаций математических моделей, в основу которых положены разные принципы. Можно классифицировать модели по целям моделирования (модели описания, оценки, оптимизации), по принципам моделирования (кибернетические, статистические), по критериям оценки (векторные и скалярные), по условиям принятия решения (определённость, риск, конфликт, неопределённость), по уровням управления, по фактору времени (статические, динамические), по степени абстрактности модели (аналитические, вычислительные, имитационные, статистические), по виду используемых функций (линейные, нелинейные),

по дискретности (дискретные, непрерывные), по степени учёта вероятностных факторов (детерминированные, вероятностные). В качестве примера рассмотрим классификацию математических моделей по виду используемых функций, с точки зрения решаемых экологических задач (таблица).

Математические модели в экологических задачах

Виды математических моделей	Решаемые экологические задачи
Модели линейного программирования	Задачи об оптимальном составе смеси
Модели нелинейного программирования	Задачи о комплексном использовании сырья Задачи об управлении запасами (запасы сырья, природных ресурсов) Задачи теории игр («хищник – жертва») Задачи о прогнозировании (экологические прогнозы относительно изменения численности животного и растительного мира)

В процессе исследования экологических систем очень важно понимать и чётко формулировать проблему, которую необходимо решить.

Сложность экологических систем иногда рассматривается как обоснование невозможности ее моделирования, изучения средствами математики. Но такая точка зрения в принципе неверна. Моделировать можно объект любой природы и любой сложности. И как раз сложные объекты представляют наибольший интерес для моделирования, именно здесь моделирование может дать результаты, которые нельзя получить другими способами исследования.

Так, например, модель биномиального распределения является базовой моделью распределения дискретных классов элементов в условиях абсолютно однородной территории или среды.

Выбор типа переменных и способа их измерения является важнейшей задачей при исследовании систем, описываемых многими переменными. В общем случае переменные могут быть непрерывными (например, измерение температуры, приход радиации), дискретными (например, наличие определённых отрядов, особей), дескриптивными (например, доминирующая порода в лесном пологом), нечёткими (например, высокосомкнутый, среднесомкнутый, низкосомкнутый лес) и чёткими (10,20,30). Они могут измеряться в каких-либо абсолютных величинах или с помощью специальных шкал и эталонов.

Экологические процессы являются динамическими вследствие изменчивости их параметров и структурных отношений. Поэтому такие процессы следует постоянно держать под наблюдением, необходимо иметь устойчивый поток новых данных.

Познание количественных отношений экологических процессов и явлений опирается на измерения. Точность измерений в значительной степени предопределяет и точность конечных результатов количественного анализа посредством моделирования. Экологические процессы, сохраняя характер массовых процессов, обязательно включают случайные компоненты. Непредвиденные случайности могут быть вызваны природными явлениями, научно-техническими открытиями, различными субъективными факторами.

Одной из проблем определения математических моделей экологических процессов является понятие неопределенности. Условно можно выделить несколько типичных источников проблем, связанных с неопределённостью исследуемого процесса: неадекватность реальности, неточность понятийного аппарата, неадекватность модели, неадекватность методов исследования, сложные нелинейные процессы, неадекватные методы анализа данных, действие неизвестных явлений и факторов [2].

Сложность экологических процессов, явлений и другие отмеченные выше особенности экологических систем затрудняют не только построение математических моделей, но и проверку их адекватности, истинности получаемых результатов. Тем не менее использование математических моделей в исследовании экологических процессов является универсальным методом изучения окружающей природы.

Библиографический список

1. Неймарк Ю.И. Математические модели естествознания и техники. – Н.Новгород: ННГУ, 1994.– 84 с.
2. Пузаченко Ю.Г. Математические методы в экологических и географических исследованиях. – М.: Академия, 2004. – 416 с.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Е.Б. Захарикова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В настоящей работе используется один из самых мощных и наиболее эффективных методов исследования процессов и систем самой различной природы и степени сложности – метод имитационного моделирования. Используя результаты имитационного моделирования, можно описать поведение системы, оценить влияние различных параметров системы на ее

характеристики, выявить преимущества и недостатки предлагаемых изменений, прогнозировать поведение системы. Для реализации данного метода используются универсальные и специальные пакеты. Разработанное программное обеспечение создано в среде универсального математического пакета MathCad.

Целью работы является разработка программного обеспечения, имитирующего процесс функционирования системы, и проведение экспериментов с целью получения статистических характеристик моделируемой системы.

Лучшей иллюстрацией области применения имитационного моделирования являются системы массового обслуживания (СМО), в терминах которых описываются многие реальные системы: вычислительные системы, узлы сетей связи, магазины, производственные участки – любые системы, где возможны очереди и отказы в обслуживании. СМО отличаются высокой наглядностью отображения моделируемых объектов и вследствие этого сравнительной простотой перехода от реальных объектов к математическим моделям.

Структура СМО задается в виде ориентированного графа, вершины которого представляют множество возможных узлов обслуживания. Представленная работа содержит три основных компонента СМО:

1. Генератор, предназначенный для моделирования входного потока заявок по заданным законам распределения (экспоненциальный, Пуассона или нормальный). Количество генераторов заявок не ограничено, их параметры задаются пользователем.

2. Узел обслуживания, осуществляющий обслуживание заявок по заданным законам распределения (экспоненциальный, Пуассона или нормальный). Количество узлов обслуживания не ограничено, их параметры и связи между узлами (параллельное, последовательное, смешанное соединение) задаются пользователем.

3. Буфер узла обслуживания, определяющий возможность ожидания обслуживания, если узел занят. Возможны два типа буфера: неограниченный (содержит неограниченное число заявок), ограниченный (содержит определенное число заявок, остальные заявки покидают систему), а также отсутствие буфера (заявка, заставшая узел обслуживания занятым, покидает систему).

Процесс моделирования СМО представляет собой последовательность изменения состояния узлов сети, которые определенным образом реагируют на события и осуществляют передачу заявок в другие узлы модели, выполняя расчет своих статистических характеристик.

Данное программное обеспечение имеет модульную структуру и встроено в MathCad с помощью подключения внешней библиотеки динамической компоновки DLL (Dynamic Link Library), написанной на языке С. При этом пользователь автоматизированной системы моделирования располагает возможностями абсолютного контроля над своей моделью, может варьировать по желанию любой параметр и судить о поведении модели по наблюдаемым результатам.

В дальнейшем предполагается использовать графический редактор для построения схемы модели, непосредственно связанный с построением графа и дальнейшей обработкой результатов.

Разработанное программное обеспечение может использоваться для решения следующих задач: формализация представления модели СМО в лаконичном и понятном виде, описание логики и закономерностей поведения моделируемого объекта, оценка основных показателей эффективности функционирования СМО, построение и проверка гипотез, которые могут объяснить наблюдаемое поведение, анализ чувствительности СМО к изменению параметров отдельных элементов, поиск оптимальных вариантов реализации СМО.

Использование данного программного обеспечения позволит существенно повысить скорость создания имитационных моделей, легко оптимизировать их структуру. Универсальность и гибкость моделей СМО обуславливает широкую область применения данного программного обеспечения: исследование производственных процессов, анализ функционирования сетей связи, транспортных систем, различных организаций сферы обслуживания, а также в экономике, экологии, демографии и социальных науках.

ВАРИАНТ КОМБИНИРОВАНИЯ АЛГОРИТМА ИМИТАЦИОННОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ С ЭВРИСТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

С.Н. Эйрих

Тольяттинский государственный университет,
г. Тольятти, Россия

В настоящей работе рассматривается *смешанный метод*. В основе – незавершённый метод ветвей и границ (МВГ) [1]. Для формирования начального множества допустимых решений применяется генетический алгоритм (ГА) [2]. В качестве локального поиска используется имитаци-

онная нормализация (ИН) [3]. Предложенный комбинированный метод даёт приемлемые решения NP-полных задач оптимизации.

Задача коммивояжёра – классическая проблема дискретной комбинаторной оптимизации [4]. Она заключается в том, чтобы найти кратчайший Гамильтонов цикл в графе. По мнению авторов, псевдо-геометрический вариант, когда все элементы матрицы геометрической ЗКВ после генерации дополнительно умножаются на случайные числа, является наиболее «приближённым к реальной действительности» и при этом наименее исследованным. Общая длина пути вычисляется по формуле (x и y – координаты города, λ – некоторое случайное число, μ – дополнительный параметр города):

$$L = \sum \left[\sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} + \lambda (\mu_i + \mu_{i+1})^2 \right]. \quad (1)$$

Комбинированный алгоритм состоит из следующих этапов:

- 1) *сформировать начальное решение генетическим алгоритмом с эвристикой ограничения операции мутации решений;*
- 2) *построить ППЗ незавершённым МВГ;*
- 3) *по окончании работы МВГ осуществить поиск решений алгоритмом имитационной нормализации;*
- 4) *в дереве решений МВГ мы можем построить полный путь до решения полученного ИН.*

Центральным алгоритмом для комбинированного метаэвристического метода является МВГ. Привлекательность данного метода в том, что МВГ позволяет быстро отсекают множества заведомо неоптимальных решений и на малых размерностях находить решение, близкое к найденному точными методами. Однако МВГ может попасть в локальный оптимум. Возникает потребность в том, чтобы расширить пространство поиска в надежде найти решение, близкое к оптимальному.

Автор провёл ряд эмпирических экспериментов и выяснил, что качество полученного решения зависит от *начального решения* и от используемого механизма получения *окрестности* данного решения. Улучшаем качество:

Начальное решение. Генетический алгоритм даёт решение, близкое к оптимальному за малое время. Чтобы повысить качество конечного решения, будем применять ГА для формирования начального решения.

Механизм получения окрестности. Используем комбинирование МВГ с алгоритмом имитационной нормализации для того, чтобы расширить *пространство поиска* МВГ. Хотя в основе имитационной нормализации и лежит метод локального поиска, ИН позволяет продолжать поиск после

нахождения локального оптимума, тем самым расширяя пространство поиска в надежде найти решение, близкое к оптимальному. Решение, полученное ИН, находится в окрестности решений МВГ, до него есть путь в дереве решений, и это не локальный оптимум, а решение, близкое к глобальному оптимуму, так как с помощью ненулевой вероятности принятия худшего решения алгоритма ИН осуществляется выход из локального оптимума.

Исследовано качество решений при одинаковом времени работы алгоритмов. Получены следующие результаты. Комбинированный алгоритм в среднем получает решение со временем выполнения на 1,8% меньшим, чем классический эвристический, и на 2,7% меньшим, чем метаэвристические.

Оценка алгоритмов, как эвристических, так и метаэвристических, для NP-полных задач не является тривиальной задачей. Важным свойством всех эвристических алгоритмов является время выполнения и близость полученного решения к оптимальному. Для задач типа 3КВ широко используются методы сравнения на основе решения тестовых задач (benchmark problems). Эти задачи имеют меньше 100, от 100 до 200 и от 200 до 250 городов.

Метаэвристические методы более затратные по времени и более сложные в применении, однако именно они являются наиболее эффективными в решении практических задач. Следует отметить, что метаэвристические методы не противопоставляются классическим эвристическим методам, а, наоборот, используют их для формирования стратегии поиска в рамках конкретного метаэвристического алгоритма.

Библиографический список

1. Melnikov B. Discrete Optimization Problems // Some New Heuristic Approaches, Proceedings of the Eighth International Conference on High-Performance Computing in Asia-Pacific Region, p.73–80, November 30–December 03, 2005.
2. Эйрих С.Н. Подход к модернизации генетического алгоритма для решения систем линейных алгебраических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 88 – 95.
3. Эйрих С.Н. Исследование имитационной нормализации на примере решения систем линейных алгебраических уравнений // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: сб. материалов Междунар. науч.-техн. конф.– Пенза: ПДЗ, 2009. – С. 74 – 76.
4. Jünger M., Thienel S., Reinelt G. Provably good solutions for the traveling salesman problem // Zeitschrift für Operations Research. – Vo. 40 (1994), 183 – 217.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ГРАФОВЫХ МОДЕЛЕЙ МНОГОУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ

Д.В. Степовой

Азово-Черноморская государственная агроинженерная академия,
г. Зерноград, Россия

Одним из методов решения технико-экономических задач большой размерности выступает графовое моделирование, которое резко упрощает анализ структур производства, технологических комплексов, делает процедуры анализа понятными и прозрачными.

В то же время при моделировании сложных хозяйственных комплексов, отражающих взаимообусловленность разнообразных процессов производства, многообразии общественных интересов возникают графы со сложной структурой. Большое количество вершин и дуг графа уже не позволяет проследить его основные структурные компоненты. Общая постановка задачи оказывается крайне громоздкой и имеет большую размерность.

Возникает вопрос о возможной декомпозиции исходной задачи, сведению ее к решению серии более простых задач меньшей размерности. В настоящей работе предлагается два возможных варианта декомпозиции, основанных на известных в теории графов понятиях – компонент сильной связности и конденсации [1,2].

Для декомпозиции задачи находим конденсацию исходного графа. Вершины конденсации соответствуют блокам разбиения исходной задачи на подзадачи, а направление дуг конденсации указывает на порядок последовательного решения получаемых задач.

Указанный метод покомпонентной декомпозиции позволяет разбивать исходный граф на отдельные блоки (компоненты сильной связности) и решать поставленную задачу последовательно по блокам.

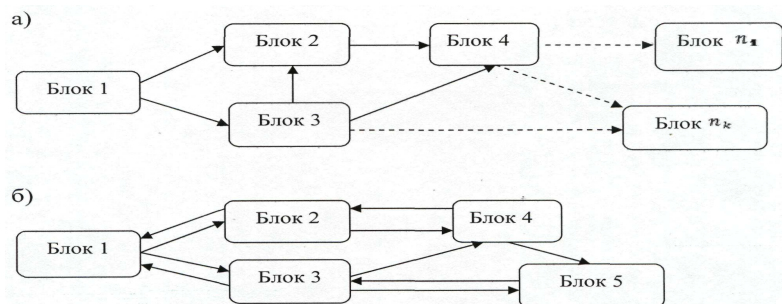


Рис.1. Направленность процессов: а) однонаправленный процесс;
б) процесс с обратной связью

Метод применяется для моделей, структура которых описывается связными ориентированными графами, содержащими компоненты сильной связности [1,2]. При этом исходный граф не является сильно-связным. Покомпонентная декомпозиция применима для графовых моделей, которые описывают системы, имеющие определенную направленность в своем развитии (где моделируемый процесс протекает в определенном направлении без возврата к предыдущим блокам модели, см. рис. 1а), а также иерархические системы. На рис. 1а каждый блок является компонентой сильной связности.

Довольно часто в задачах моделирования приходится иметь дело с системами с обратной связью или с процессами, протекающими в двух направлениях: прямом и обратном (см. рис. 1б).

Из определения сильной связности следует, что граф, изображенный на рис. 1б, является сильно связным, а значит, он представляет целый, неделимый с точки зрения метода покомпонентной декомпозиции блок. Поэтому для моделей с подобной структурой данный метод декомпозиции неприменим.

Для декомпозиции сильно связных графов, воспользуемся понятием суммы графов.

Суммой G_1+G_2 двух графов $G_1=(X,U_1)$ и $G_2=(X,U_2)$ с одним и тем же множеством вершин X называется граф $G'=(X,U')$, множество дуг которого $U'=U_1 \cup U_2$; здесь U_1 и U_2 – множество дуг графов G_1 и G_2 соответственно.

Используя понятие суммы графов, можно свести задачу декомпозиции сильносвязного графа к покомпонентной декомпозиции. Для этого нужно разложить исходный граф на сумму двух графов. Дуги первого графа суммы соответствуют прямому ходу протекания моделируемого процесса, а дуги второго графа отвечают обратному ходу (или обратным связям).

Например, граф, изображенный на рис. 1б, можно представить в виде суммы двух графов G_1+G_2 (см. рис. 2).

Сначала применяем метод покомпонентной декомпозиции для первого графа G_1 (прямой ход). Затем решаем задачу для второго графа G_2 (обратная связь).

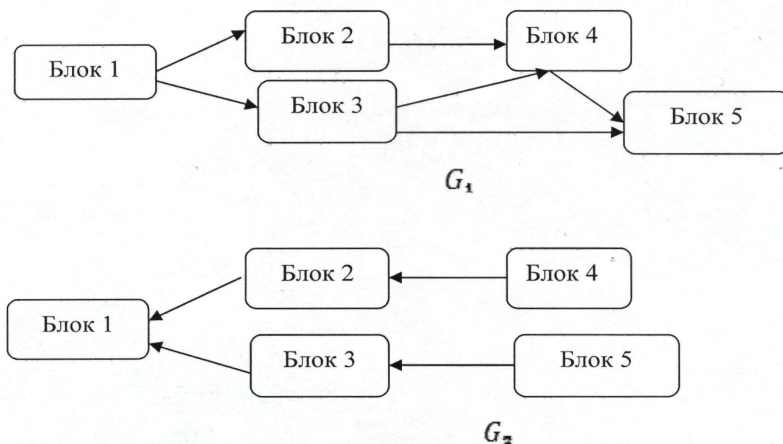


Рис. 2. Разбиение на сумму графов

Достоинством метода покомпонентной декомпозиции является то, что существует алгоритм нахождения конденсации графа, а значит, разбиение графа на блоки несложно реализовать программой. Следовательно, процесс декомпозиции систем большой размерности можно эффективно осуществить на компьютере.

Библиографический список

1. Берж К. Теория графов и ее применения. – М.: Изд. иностр. лит., 1962.
2. Лекции по теории графов: для студентов по спец. «Математика» и «Прикл. математика» / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. – М.: Наука, 1990.

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНОЙ ОБРАБОТКИ ТРАЕКТОРНОЙ МАТРИЦЫ

А.К. Гришко, В.А. Корж

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Существует много параметрических методов анализа временных рядов. К ним относятся разложения в ряд Фурье, линейная регрессия и т. д. У данных методов есть свои преимущества и недостатки, в частности, ограничения по применению к некоторым классам временных

рядов, а также не всегда удовлетворяющие требованиям результаты анализа. Каждый из этих методов предусматривает синтез математической модели, поэтому при анализе следует учитывать выбор метода исследования в зависимости от класса временного ряда и вида модели. Другое дело, если модель априори неизвестна. Тогда будут лучше себя проявлять методы, настроенные на более широкий класс рядов.

Одной из идей, лежащей в основе предлагаемого метода, является создание повторности путем перехода от временного ряда (последовательности некоторых измерений или характеристик в равноотстоящие моменты времени) к последовательности векторов, состоящих из отрезков временного ряда выбранной длины. Тогда получается что-то вроде многомерной выборки, так как если исходный ряд имел какую-то структуру, то и его отрезки наследуют эту структуру. Второй идеей является анализ полученной многомерной выборки (траекторной матрицы) с помощью ее сингулярного разложения или, используя статистические аналогии, анализа главных компонент. Тем самым получается разложение исходного временного ряда (точнее, его траекторной матрицы) по базису, порождаемому им самим.

Для формирования траекторной матрицы рассмотрим вещественнозначный временной ряд длины N , образованный последовательностью равноотстоящих значений функции $F = (f_0, \dots, f_{N-1})$. Пусть при этом $N > 2$. Предположим, что существует по крайней мере одно i , такое что, $f_i \neq 0$.

Пусть M – некоторое число, называемое длиной окна, причем $1 < M < N$. Представим первые M -значения в качестве первой строки матрицы X . В качестве второй строки матрицы возьмем значения последовательности с X_2 по X_{M+1} , т.е. мы переводим исходный временной ряд в последовательность многомерных векторов; такое действие будем называть процедурой вложения.

Процедура вложения образует последнюю строку матрицы с номером $K = N - M + 1$ последних M элементов последовательности. Образуются вектора вложения, $X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+M-2})^T, 1 \leq i \leq K$, имеющие размерность M . Матрицу M можем рассматривать как матрицу M -мерной выборки объема K или M -мерный временной ряд, которому соответствует M -мерная траектория ломанная в M - мерном пространстве из $K-1$ звена. То есть M теперь представляет собой траекторную матрицу ряда F :

$$X = [X_1 : \dots : X_K],$$

столбцами которой будут являться вектора вложения, а сама матрица X будет матрицей ряда.

Траекторная матрица имеет вид:

$$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{M,K} = \begin{pmatrix} f_0 f_1 f_2 \dots f_{K-1} \\ f_1 f_2 f_3 \dots f_K \\ f_2 f_3 f_4 \dots f_{K+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{M-1} f_M f_{M+1} \dots f_{N-1} \end{pmatrix}$$

После вычисления матрицы $S = XX^T$ применяем анализ главных компонент, который состоит в вычислении собственных чисел и собственных векторов матрицы S , т.е. в её разложении $S = UVU^T$, где V – это диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы S в убывающем порядке; обозначим их как $(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0)$, а U – это ортогональная матрица собственных векторов матрицы S ; обозначим их как $U_1, \dots, U_L$.

Матрицы U и V имеют множество интерпретаций. В данном случае мы можем рассмотреть U как матрицу, с помощью которой мы можем перейти к главным компонентам $XU = Y = (y_{ij})$.

Пусть $d = \max\{i, \text{таких, что } \lambda_i > 0\}$. Обозначим $V_i = X^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$, где $i = 1, \dots, d$. Тогда сингулярное разложение матрицы X можно записать как

$$X = X_1 + \dots + X_d, \text{ где } X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

Каждая из матриц X_i имеет ранг 1, тогда назовем их элементарными матрицами, а набор $(\sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T)$ будем называть i -й собственной тройкой сингулярного разложения.

На основе i -й собственной тройки сингулярного разложения группировка делит всё на множество индексов $\{1, \dots, d\}$, на m непересекающихся подмножеств $I_1, \dots, I_m$. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_p\}$.

Результирующая матрица X_i , соответствующая группе I , будет определяться как $X_I = X_{i_1} + \dots + X_{i_p}$.

Тогда необходимо вычислять такие матрицы для $I = I_1, \dots, I_m$; таким образом, i -я собственная тройка сингулярного разложения может быть записана в сгруппированном виде:

$$X = X_{I_1} + \dots + X_{I_m}.$$

Такую процедуру выбора множеств $I_1, \dots, I_m$ назовем группировкой собственных троек главных компонент.

На последнем этапе необходимо каждую матрицу сгруппированного разложения главных компонент перевести в новый ряд длины N . Для этого используем матрицу перехода к главным компонентам $XU = Y = (y_{ij})$.

Применим процедуру диагонального усреднения, которая переведет значения матрицы Y в ряд $(g_0, \dots, g_{N-1})$, сопоставляя каждой k -й диагонали матрицы (значениям y_{ij} с $i + j = k$) число g_{k-2} как среднее арифметическое соответствующих значений. Предположим, что матрица Y является траекторной матрицей некоторого ряда $(h_0, \dots, h_{N-1})$, тогда $g_i = h_i$ для всех i .

Применяя диагональное усреднение к результирующим матрицам X_{I_k} , мы получим ряды вида $\tilde{F}^{(k)} = (\tilde{f}_0^{(k)}, \dots, \tilde{f}_{N-1}^{(k)})$. Тогда исходный ряд $(f_0, \dots, f_{N-1})$ разложится в сумму m рядов:

$$f_n = \tilde{f}_n^{(1)} + \dots + \tilde{f}_n^{(m)}.$$

Стоит отметить, что переход к исходному ряду, осуществленный процедурой диагонального усреднения матрицы ряда, может привести к некоторому искажению полученной структуры. Однако одной из отличительных черт данного метода является его естественность.

Метод не навязывает изначально какую-либо модель исследуемого временного ряда. Но при этом он позволяет так разложить ряд на элементарные составляющие, что по ним оказывается возможным воссоздать структуру ряда, например, найти периодические составляющие. Кроме этого, метод дает возможность очищать сигнал от шумовой составляющей.

**ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЕЛИЧИНЫ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ
РАБОЧИХ В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ 1920-х ГОДОВ
(НА МАТЕРИАЛАХ ПЕНЗЕНСКОЙ ГУБЕРНИИ)**

С.Е. Игошина, Т.Ю. Просвирнина

Кузнецкий институт информационных и управленческих технологий
(филиал) Пензенского государственного университета,
г. Кузнецк, Россия

В последнее время наблюдается повышенный интерес к математическому моделированию исторических процессов.

В настоящей работе рассматриваются и объясняются при помощи методов экономической статистики некоторые экономические процессы, происходившие в различных отраслях промышленности Пензенской губернии в 1920-е годы.

В результате исследования рассмотрены подходы, позволяющие выявить основную тенденцию изменения размеров заработной платы нашего региона в 20-е годы XX века в мукомольной, металлообрабатывающей промышленности и на спичечном производстве [4].

Показано, что именно с использования элементов математического языка начинается эмпирическое исследование исторических процессов, претендующее на научность. В связи с этим данное направление исследований является актуальным и целесообразным.

При изучении социально-экономических явлений приходится иметь дело со сложным механизмом взаимодействия факторов, формирующих тренд.

Одна из задач, возникающих при анализе рядов динамики, – изучение основной тенденции развития (тренда) рассматриваемого явления. Для того чтобы создать количественную модель, выражающую общую тенденцию изменений уровней динамического ряда во времени, используется метод аналитического выравнивания ряда динамики. Основным содержанием этого метода является то, что основная тенденция развития y_t рассчитывается как функция времени: $y_t = f(t)$.

Одним из применяемых в практике статистического изучения тренда показателей адекватности математической функции является стандартная

ошибка аппроксимации $\sigma_{yt} = \sqrt{\frac{\sum (y_{ti} - y_i)^2}{n}}$, где y_t , y_i – теоретические

и эмпирические уровни ряда. За наиболее адекватную принимается функция, стандартная ошибка аппроксимации которой имеет минимальное значение.

В результате проделанной работы была получена трендовая модель изменения величины заработной платы работающих в различных отраслях в 20-е годы в Пензенской губернии, графически показано влияние тенденции и сезонности на величину заработной платы в рассматриваемый период.

Необходимо отметить, что проводимые численные расчеты реализованы в табличном процессоре MS Excel с использованием математических и статистических функций. Графические представления полученных временных моделей заработной платы выполнены также средствами MS Excel.

Полученная модель может использоваться для воспроизведения утерянных или неизвестных исторических фактов.

На основе изучения и анализа полученных результатов можно прийти к выводу, что на территории Пензенской губернии в первое десятилетие советской власти существовала целая группа факторов и причин, влияющих на величину заработной платы на предприятиях различной принадлежности.

Результаты исследования хорошо объясняются фактами, полученными при анализе литературных источников [1,2,3].

Библиографический список

1. Ильухов А.А. Жизнь в эпоху перемен: материальное положение городских жителей в годы революции и Гражданской войны. – М.: Российская политическая энциклопедия, 2007. – С. 264.
2. Камардин И.Н. Трудовые конфликты в Среднем Поволжье 1918-1929 гг. (по материалам Пензенской, Самарской и Симбирской (Ульяновской) губерний). – Пенза, 2001.
3. Шарошкин Н.А. Промышленность и рабочие Поволжья в 20-е годы. – Пенза, 1998. – С. 150.
4. Статистический сборник по Пензенской губернии. – Пенза, 1926.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РАДИОПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ Ni-Zn ФЕРРИТОВ

С.Е. Игошина, А.А. Карманов

Кузнецкий институт информационных и управленческих технологий
(филиал) Пензенского государственного университета,
г. Кузнецк, Россия

В работе приведена физико-математическая модель температурной зависимости радиофизических характеристик материалов на основе Ni – Zn ферритов. В результате была сформулирована краевая задача о распространении электромагнитного поля в ферромагнитной среде в условиях возрастающей температуры, поставлены граничные и начальные условия, проведено совместное решение волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Полученные данные сопоставлялись с результатами исследований поглощающих свойств материалов на основе Ni – Zn ферритов при постоянной температуре, и сделаны выводы.

Для решения данной задачи использовались следующие условия:

$$T = 300 - 420 K, \varepsilon = 10, \mu = 1150, E_0 = 0,1 B / м, \gamma = 10^8 Гц, \alpha = 0,4$$

$$\ell = 0,008 м$$

В результате был получен закон процесса распространения электромагнитного поля в ферромагнитной среде следующего вида:

$$E(x, t) = [E_0(1 - R_e) \cos \frac{\pi n}{l} x + \frac{E_0 \frac{z_0}{z_t} T_e - E_0(1 - R_e) \cos \frac{\pi n}{2}}{\sin \frac{\pi n}{2}} \sin \frac{\pi n}{l} x] \times$$

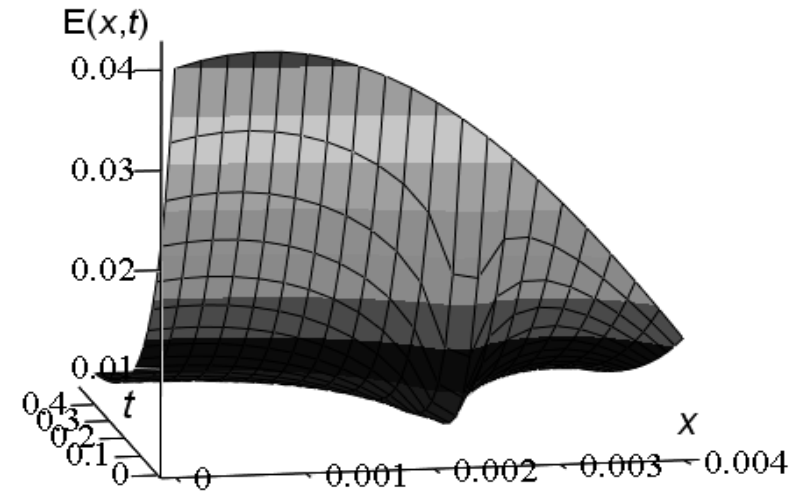
$$\times \frac{4 \sin \frac{\pi n}{2}}{\varepsilon(T)(1 - R_e) \pi n} \left[-\frac{k_2}{k_2 - k_1} \exp(k_1 t) + \frac{k_1}{k_1 - k_2} \exp(k_2 t) \right],$$

$$\text{где } k_{1,2} = -\frac{2\pi}{\varepsilon(T)} \frac{\sigma}{\omega} \pm \sqrt{\frac{4\pi^2}{\varepsilon^2(T)} \frac{\sigma^2}{\omega^2} + \frac{\lambda^2}{\varepsilon(T)\mu(T)} \frac{c^2}{\omega^2}},$$

$$\varepsilon(T) = \frac{3000}{\sum_{n=1}^{\infty} F_n \exp\left(-\frac{k}{c\rho} \lambda_n^2 t\right) \cos \lambda_n x},$$

$$\mu(T) = -0.0661 \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} F_n \exp\left(-\frac{k}{c\rho} \lambda_n^2 t\right) \cos \lambda_n x \right]^2 +$$

$$+ 49.043 \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} F_n \exp\left(-\frac{k}{c\rho} \lambda_n^2 t\right) \cos \lambda_n x \right] - 6850.8.$$



Процесс затухания электромагнитной волны в ферромагнитной среде при температуре 420 K

Актуальность работы обусловлена, с одной стороны, большим интересом к теме «Радиопоглощающие ферриты» в современной науке, с другой стороны, ее недостаточной разработанностью. Рассмотрение вопросов, связанных с данной тематикой, имеет как теоретическую, так и практическую значимость.

Сравнение результатов проделанной работы с результатами работ [1,2] показывает увеличение амплитуды электромагнитной волны в начальный момент времени, что можно связать с процессом нагрева материала. Это объясняется сдвигом резонансной частоты покрытия, обусловленной резонансом доменных границ (ферромагнитный резонанс). Исследования показали [1], что при комнатной температуре амплитуда волны значительно уменьшается за 0,2 с, пройдя половину толщины образца. С повышением температуры до 573 K время затухания увеличивается до 0,4 с, что говорит о снижении эффективности поглощения радиоволн в радиопоглощающем покрытии. Таким обра-

зом, использование данного радиопоглощающего покрытия нецелесообразно при температурах выше 300 К.

Библиографический список

1. Игошина С.Е., Попов А.А., Карманов А.А. Численный анализ радиопоглощающих свойств материалов на основе Ni – Zn ферритов // Труды IV Международной науч.-техн. конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем», 2009. – С. 158 – 162.
2. Yuksel S. Kirtay, Ozkan T.O., The effect of B₂O₃ addition to the microstructure and magnetic properties of Ni_{0.4}Zn_{0.6}Fe₂O₄ ferrite// Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – V. 320, №. 5. – P. 714 – 718.
3. Котов Л.Н., Бажуков К.Ю. Расчёт магнитных спектров ферритов // Радиотехника и электроника. – 1999. – Т. 4, №7. – С. 41 – 46.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ МНОЖЕСТВЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТРАХОВОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Ю.В. Напалкова

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва,
г. Саранск, Россия

Для оценки финансового результата действующей страховой организации и выработки на этой основе тактики внедрения и развития новых видов страхования необходимо располагать адекватной математической моделью, отражающей изменение факторов, влияющих на формирование прибыли и расходов страховой организации. Объемы страховых премий и выплат по видам обязательного и добровольного страхования, на наш взгляд, входят в число вышеуказанных факторов.

На базе статистических данных за период с 2005-2009 гг. [1] построим модель множественной линейной регрессии [2]:

$$y = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3 + \varepsilon.$$

Данная модель позволяет определить объем обязательных страховых премий в процентах к итогу.

Методом наименьших квадратов найдем вектор оценок коэффициентов регрессии:

$$s = (X^T X)^{-1} X^T Y = (4.5 \quad -0.103 \quad 0.978 \quad 0.945)^T. \quad (1)$$

$$\text{Здесь } X = \begin{pmatrix} 1 & 1.4 & 43 & 9.1 \\ 1 & 1.2 & 53.3 & 9.5 \\ 1 & 0.9 & 57.2 & 8.7 \\ 1 & 0.1 & 59.7 & 7.6 \\ 1 & 0.9 & 60.8 & 6.8 \end{pmatrix} \text{ и } Y = \begin{pmatrix} 53.7 \\ 64 \\ 66.7 \\ 68.3 \\ 68.5 \end{pmatrix} - \text{объем обяза-}$$

тельных страховых премий. Тогда уравнение множественной регрессии будет иметь вид:

$$y = 4.5 - 0.103x_1 + 0.978x_2 + 0.945x_3, \quad (2)$$

где x_1 – страхование от несчастных случаев и болезней, x_2 – медицинское страхование, x_3 – страхование ответственности.

Проведем проверку общего качества уравнения множественной регрессии. Найдем абсолютную ошибку аппроксимации

$$\varepsilon = Y - X \cdot s = (-0.02 \quad 0.117 \quad -0.155 \quad 0.031 \quad 0.027)^T.$$

Тесноту совместного влияния факторов на результат оценим с помощью индекса множественной корреляции $R = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}} \approx 0.9998$,

т.е. связь между признаком Y и факторами X сильная. Найдем коэффициент детерминации $R^2 \approx 0.98$, т.е. в 98 % случаев изменения x приводят к изменению Y . Другими словами, точность подбора уравнения регрессии высокая.

Проведем анализ статистической значимости уравнения регрессии. Для этого используем F-статистику (критерий Фишера):

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{(n - m - 1)}{m} \approx 1266.9.$$

Табличное значение при степенях свободы $k_1 = 3$ и $k_2 = n - m - 1 = 1$ равно $F_{кр}(3; 1) = 216$. Поскольку имеет место неравенство $F > F_{кр}$, то коэффициент детерминации статистически значим, и уравнение регрессии статистически надежно.

Проверим нулевую гипотезу $H_0 : \{R = 0\}$ при уровне значимости $\alpha = 0.05$ о равенстве нулю коэффициента множественной корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1 : \{R \neq 0\}$. Здесь

$T_{набл} = R \frac{\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-R^2}} \approx 61.65$. По таблице Стьюдента находим

$T_{крит}(1; 0.05) = 6.314$. Поскольку $T_{набл} > T_{крит}$, то отклоняем гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции. Другими словами, коэффициент корреляции статистически значим.

Аналогично построим модель множественной линейной регрессии, позволяющую определить объем выплат по договорам обязательного страхования в процентах к итогу. Применив (1), найдем вектор оценок

коэффициентов регрессии. Здесь $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 27.9 & 10.9 \\ 1 & 1 & 33.1 & 10.4 \\ 1 & 0.8 & 37.5 & 9.5 \\ 1 & 0.7 & 41.8 & 8.4 \\ 1 & 0.7 & 47.5 & 8.9 \end{pmatrix}$ и

$Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 44.5 \\ 47.8 \\ 50.9 \\ 57.1 \end{pmatrix}$ – объем выплат по договорам страхования. Тогда уравнение

множественной регрессии будет иметь вид:

$$y = 0,056 - 0,23x_1 + 0,988x_2 + 1,154x_3, \quad (3)$$

где x_1, x_2, x_3 отражают те же показатели, что и в (2).

По аналогии с предыдущим проведем проверку общего качества уравнения множественной регрессии. Найдем абсолютную ошибку аппроксимации $\varepsilon = Y - X \cdot s = (0.042 \quad -0.018 \quad -0.072 \quad 0.027 \quad 0.02)^T$.

Индекс множественной корреляции показывает, что связь между признаком Y и факторами X сильная, т.к. $R \approx 0.9999$. Коэффициент детерминации $R^2 \approx 0.99$, это значит, что в 99 % случаев изменения x приводят к изменению Y , а следовательно, точность подбора уравнения регрессии высокая.

Анализ статистической значимости уравнения регрессии (3) показал, что коэффициент детерминации статистически значим и уравнение ре-

грессии статистически надежно; здесь $F = 6035.7$, $F_{кр}(3; 1) = 216$ и $F > F_{кр}$.

При проверке нулевой гипотезы $H_0 : \{R = 0\}$ при $\alpha = 0.05$ о равенстве нулю коэффициента множественной корреляции и конкурирующей гипотезе $H_1 : \{R \neq 0\}$ выяснили, что коэффициент корреляции статистически значим, поскольку $T_{набл} \approx 134.5$, $T_{крит}(1; 0.05) = 6,314$ и выполняется неравенство $T_{набл} > T_{крит}$.

Для уравнений (2) и (3) значения R и R^2 близки к единице, поэтому зависимость носит функциональный характер. Кроме этого, проведенный анализ позволяет говорить о статистической надежности построенных уравнений множественной линейной регрессии, а следовательно, они могут быть использованы для оценки финансового результата действующей страховой организации.

Библиографический список

1. Российский статистический ежегодник 2010 / Федеральная служба государственной статистики (Росстат). – М., 2010.
2. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика: учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая шк., 1984. – 248 с.

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ СМО В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

В.В. Шахов

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

Большой пласт современных экономических задач, где возникает случайный поток запросов на выполнение каких-либо видов работ, а также происходит удовлетворение этих запросов, тесно связан с системами массового обслуживания (СМО). Особое место занимают системы с потерями или отказами. Если в указанных СМО запросы на обслуживание поступают в момент, когда все приборы обслуживания заняты, то заявки получают отказ и теряются. В практических приложениях наиболее часто употребляют СМО с отказами вида $M/M/n/n$ и $M/G/n/n$ [1]-[5]. Например, с помощью указанных систем проводят анализ следующих процессов:

прием посетителей фиксированной группой клерков;
 логистика в сфере обслуживания на высококонкурентном рынке;
 противостояние средств ПВО и авиации;
 функционирование call-центров;
 поступление запросов на соединение мобильных терминалов с базовой станцией в сотовых сетях;
 проверка текущей отчетности предприятий налоговой инспекцией;
 развитие некоторых DDoS атак в TCP/IP сетях;
 обработка потока заявок (деталей, задач) несколькими устройствами (приборами, рабочими) и т.д.

В настоящей работе предложен способ снижения трудоемкости вычислений при использовании результатов теории СМО в практических приложениях.

Основным информативным параметром в системах с отказами является вероятность блокировки запроса на обслуживание (интенсивность потерь), вычисляемая по В-формуле Эрланга:

$$B(n, \rho) = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!}}.$$

Пусть задана точность вычислений ε , предложенная нагрузка ρ , количество устройств n . Если $\rho \geq n + \varepsilon^{-1}$, то справедлива аппроксимация

$$B(n, \rho) \approx 1 - \frac{n}{\rho}.$$

Условие для аппроксимации является достаточным, в некоторых случаях приближенная формула может быть использована и при $\rho < n + \varepsilon^{-1}$.

Данная аппроксимация позволяет повысить производительность вычислений по В-формуле Эрланга. Тем самым открывается возможность решения ряда задач по организации эффективного управления различными экономическими системами, моделируемыми СМО вида M/G/n/n. В случае, если $\rho < n$, аппроксимация не работает, но позволяет ускорить стандартный метод вычисления В-формулы Эрланга. Рассмотренная здесь аппроксимация позволяет вычислять с желаемой точностью обратную формулу Эрланга в наиболее критических для

практических приложений случаях, когда поступающая нагрузка существенно превышает возможности системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-07-00183).

Библиографический список

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979.
2. Trivedi K.S. Probability & Statistics With Reliability, Queueing and Computer Science Applications. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 2002, N.J.
3. Raj J. The Art of Computer Systems Performance Analysis. Wiley, New York. – N.Y., 1991.
4. Shakhov V.V. An efficient method for proportional differentiated admission control implementation // Springer LNCS. – Vol. 6235 (2010). – 91 – 97.
5. Thomas B. Crabill, Donald Gross and Michael J. Magazine: A Classified Bibliography of Research on Optimal Design and Control of Queues // Operations Research. – Vol. 25. – №. 2 (Mar. - Apr., 1977). – Pp. 219 – 232.

ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ВНЕДРЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ DDoS АТАКАМ

В.В. Шахов

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

Распределенная атака на отказ в обслуживании (Distributed Denial of Service, DDoS) остается наиболее эффективным типом разрушающего воздействия в современных сетях. Около 90% DDoS атак используют уязвимость TCP протокола, например, знаменитая атака TCP SYN Flooding, при которой очередь полуоткрытых соединений атакуемого сервера заполняется фальшивыми запросами (SYN пакеты) на соединение. Исследования DDoS атак широко представлены в литературе, разработано множество механизмов противодействия указанному типу разрушающего воздействия. Однако даже в рамках DDoS атаки конкретного типа нет единого мнения по выбору наилучшей схемы защиты. Например, для подавления атаки SYN Flooding Служба реагирования на компьютерные инциденты CERT (Computer Emergency Response Team) рекомендует использовать

механизмы, модифицирующие протокол TCP/IP, такие, как, SYN cookies. В то же время другие специалисты категорично отвергают любые модификации протокола и предлагают использовать укрепление стека TCP/IP за счет увеличения размера очереди полуоткрытых соединений или уменьшения времени ожидания ответного пакета (SYN-ACK).

Вопрос экономической целесообразности внедрения того или иного метода противодействия большинству DDoS атак остается открытым. В силу отсутствия возможности проводить эксперименты с реальными сетями ответ на него можно дать лишь при наличии адекватных математических или имитационных моделей рассматриваемых атак. Все чаще прибегают к анализу производительности телекоммуникационных систем с помощью имитационных моделей, однако указанные модели не позволяют выявить все важные причинно-следственные связи. Заметим, что при большом количестве публикаций по тематике имеется всего лишь несколько исследований аналитических моделей DDoS атак [1] – [4]. Указанные модели используют следующее допущение: время прохождения пакета через сеть моделируется экспоненциальным распределением, что дает возможность использовать аппарат марковских цепей для анализа эффективности методов защиты. Так, буфер сервера в условиях TCP SYN Flooding моделируется СМО вида M/G/n/n. В реальности время жизни любого пакета в TCP/IP сети искусственно ограничено. В частности, согласно протоколу TCP/IP, запись (SYN пакет) из очереди полуоткрытых соединений удаляется по истечении определенного времени (параметр timeout) – считается, что пакет заблудился. Более корректно было бы использовать усеченное экспоненциальное распределение, но это затруднило бы использование математического аппарата. В статье предлагается подход, основанный на замене усеченного распределения экспоненциальным распределением со схожими статистическими свойствами; рассмотрена ситуация, когда отказ от усеченного распределения при моделировании времени прохождения пакета через TCP/IP сеть оказывает существенное влияние на оценку эффективности системы, предложены рекомендации по ее уточнению.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-07-00183).

Библиографический список

1. Wang Y., Lin C., Li Q., Fang Y. A queueing analysis for the denial of service (DoS) attacks in computer networks Computer Networks, Volume 51, Issue 12, 22 August 2007. – P. 3564 – 3573.

2. Khan S., Traore I., Queue-based analysis of DoS attacks // in: Proceeding of the 2005 IEEE Workshop on Information Assurance and Security. – United States Military Academy, West Point, NY. – P. 266 - 273.

3. Chang R.K.C., Defending against Flooding-based distributed denial-of-service attacks: a tutorial, IEEE Communications Magazine 40 (10) (2002). – P. 42 – 51.

4. Shakhov V.V., Choo H. On Modeling Counteraction against TCP SYN Flooding, Springer Lecture Notes in Computer Science, Volume 4883, 2008. – P. 574 – 583.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ

ВЫДЕЛЕНИЕ РЕЧЕВОГО СИГНАЛА ИЗ СУММЫ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ

Т.В. Черушева

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В связи с возросшей информатизацией современного общества и увеличением числа объектов и потоков информации, которые необходимо защищать от несанкционированного доступа, все более актуальными становятся проблемы использования механизмов речевых технологий для разграничения доступа к информационным вычислительным системам. Возросший интерес к идентификации по образцу речи обусловлен преимуществами установления и проверки подлинности личности по отрезку речевой волны, так как голос невозможно украсть. Задача идентификации состоит в том, чтобы определить принадлежность образа речи неизвестного человека к одному из наборов речевых образов заранее известных дикторов.

В настоящей работе предлагается метод выделения речевого сигнала из набора в n записей одновременного разговора двух людей, говорящих на фоне случайных помех. Кроме этого, есть запись речевых сигналов каждого из них с устраненными шумами. Голос одного человека будем считать эталоном. Задача заключается в выделении одного голоса из пары голосов, сравнении его с эталонным и в определении влияния помех, амплитуда которых меняется от 5 до 25 Дб, на идентификацию человека.

Каждый голос обладает рядом особенностей, присущих только ему, например, частота колебания голосовых связок. Важными характери-

ками речи являются логарифмический спектр передаточной функции, представляющий собой зависимость логарифма амплитуды, выраженной в децибелах, от частоты, и спектральная плотность мощности речевого сигнала. При одновременной речи двух людей характеризующие их волновые колебания накладываются и образуют совершенно новую волну. Вычитая из графика спектральной плотности мощности общей записи соответствующего графика для голоса одного из говорящих, мы получаем значения, характеризующие человека, идентификацию которого производим. Для каждой записи из набора получим соответствующие графики выделенного сигнала. Находим первые шесть формант и соответствующие им значения частот заносим в таблицу. Первые пять голосов принадлежат одному человеку, голос №1 является эталонным. Голос №6 – выделенный голос родственника. Голос №7 – выделенный голос чужого человека.

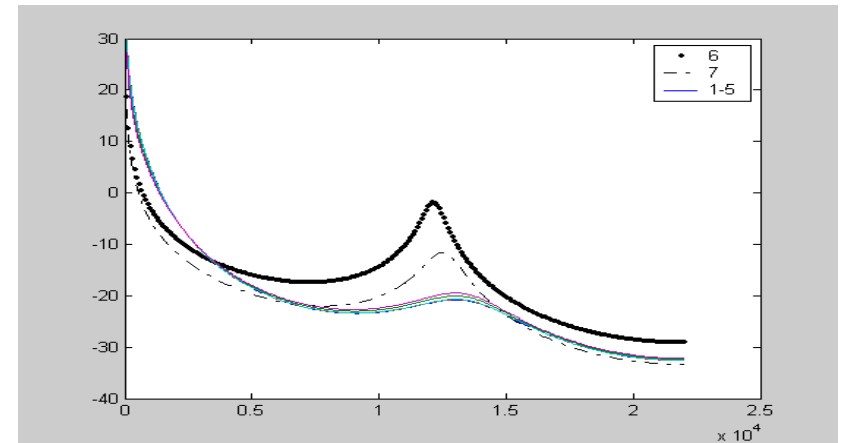
№ форманты № голоса	1(Гц)	2(Гц)	3(Гц)	4(Гц)	5(Гц)	6(Гц)	max LM(1/A) (Гц)
1	430,665	1119,727	2153,320	3100,781	3445,312	4565,039	13006
2	430,664	1033,594	2067,187	2670,117	3014,648	3617,578	13006
3	516,796	1033,594	2067,187	2670,117	3100,782	3445,313	13006
4	516,796	1033,593	2067,187	2670,117	3014,648	4565,039	13006
5	430,664	1033,593	2153,320	3014,648	3617,577	4565,039	13006
6	430,665	1378,125	4306,641	5598,636	8354,885	9388,476	12575
7	344,530	1205,860	2067,187	5426,365	8354,882	9388,476	12145

Можно заметить, что частоты формант голосов одного человека совпали или же оказались близкими, а значения, характеризующие голоса других людей, отличаются от эталонных. Для подтверждения полученных данных проведем анализ логарифмического спектра полюсного фильтра $LM(1/A) = 10 \log_{10} |1/A(e^{j\theta})|^2$,

$$\text{где } A(z) = \frac{(1 - e^{-cT} z^{-1})^2 \left\{ \prod_{i=1}^6 [1 - 2e^{-c_i T} \cos(b_i T) z^{-1} + e^{-2c_i T} z^{-2}] \right\}}{(1 - z^{-1})}, \theta = 2\pi f / f_s,$$

$f_s = 1/T$, а коэффициенты c_i и b_i определяются из формул $F_i = b_i / 2\pi$ и $B_i = 0,707c_i / \pi$.

На рисунке показаны графики логарифмических спектров, максимумы которых занесены в таблицу.



Доверительный интервал математического ожидания для n значений максимумов частот логарифмического спектра полюсного фильтра определим по формуле $\tilde{m} - t(\beta)\sqrt{\frac{D}{n}} < \tilde{m} < \tilde{m} + t(\beta)\sqrt{\frac{D}{n}}$, где D – дисперсия.

Доверительная вероятность $t(\beta)$ полагалась равной 0,99. Голоса родственника и чужого человека не совпали с эталоном, и их логарифмический спектр полюсного фильтра отличается от спектра исследуемого голоса. Максимумы логарифмического спектра модуля передаточной функции попали в доверительный интервал (12789; 13050) по частоте и по децибелам, ширина которого составила 2,33 Дб. Поставленная задача выполнена.

Библиографический список

1. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, М., 1990.
2. Черушева Т.В., Волкова М.А. Идентификация речевых сигналов // Сборник статей III Междунар. науч.-техн. конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем». – Пенза, ИИЦ ПензГУ, 2009.
3. Черушева Т.В., Подлиннова Е.В. Идентификация речевых сигналов на фоне случайных помех // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем: сб.ст.IV Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза: ИИЦ ПензГУ, 2010.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ СТЕГАНОГРАФИИ

Ю.Ф. Захарова, А.Н. Алаткин

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Слово «стеганография» имеет греческие корни и буквально означает «тайнопись». Исторически это направление появилось первым, но затем во многом было вытеснено криптографией. Но если при криптографии наличие шифрованного сообщения само по себе привлекает внимание противников, то при стеганографии наличие скрытой связи остается незаметным.

Существуют два основных направления в компьютерной стеганографии: связанное с цифровой обработкой сигналов и не связанное с ней. В последнем случае сообщения могут быть встроены в заголовки файлов, заголовки пакетов данных. Это направление имеет ограниченное применение в связи с относительной легкостью вскрытия и/или уничтожения скрытой информации. Большинство текущих исследований в области стеганографии так или иначе связаны с цифровой обработкой сигналов. Это позволяет говорить о цифровой стеганографии, которой и посвящена настоящая работа.

Основной принцип встраивания данных в стегоконтейнер можно описать следующим образом. Пусть сигнал контейнера представлен последовательностью из бит. Процесс скрытия информации начинается с определения бит контейнера, которые можно изменять без внесения заметных искажений – стегопути. Далее среди этих бит обычно в соответствии с ключом выбираются биты, заменяемые битами цифровых водяных знаков (ЦВЗ), в качестве которых может выступать также и текст сообщения.

Выделяют следующие способы внедрения в контейнер битов ЦВЗ:

- 1) инверсия бита. Значения битов стегопути заменяются на противоположные. При этом «1» может соответствовать замене 0->1, «0» - замена 1->0;
- 2) вставка бита. Перед битом стегопути вставляется бит ЦВЗ. При этом значение бита ЦВЗ должно быть противоположно значению бита контейнера;
- 3) удаление бита. Выбираются пары «01» или «10» битов стегопути, соответствующие разным значениям бита ЦВЗ. Затем первый бит пары удаляется;

4) использование бита-флага. При этом на то, что очередной бит контейнера (неизменяемый!) является битом ЦВЗ, указывает инверсия предшествующего бита-флага;

и ряд других, менее существенных для данной работы.

Стеганографические методы, применяемые для встраивания информации в видео, сжатое по стандарту MPEG-2, должны работать в реальном времени, при этом необходимо, чтобы ЦВЗ встраивались непосредственно в поток сжатых данных, чтобы избежать лишних вычислений.

Существует три основных направления встраивания информации в видеоряд:

методы встраивания информации на уровне коэффициентов;

методы встраивания информации на уровне битовой плоскости;

метод встраивания информации за счет энергетической разности между коэффициентами.

В последнем случае в основе лежит дифференциальное встраивание энергии (ДЭВ) ЦВЗ, который осуществляет внедрение ЦВЗ, состоящего из k бит b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, k-1$) в I-кадры MPEG-видео или в JPEG-изображения. Каждый бит ЦВЗ встраивается в выбранную область, состоящую из p блоков по 8×8 коэффициентов ДКП канала яркости изображения каждый. Бит ЦВЗ внедряется в выбранную область модификацией разности энергий D между высокочастотными коэффициентами ДКП верхней части этой области (субобласть A) и ее нижней части (субобласть B) (см. рисунок). Энергия субобласти A вычисляется по формуле

$$E_A(c, n, Q) = \sum_{d=0}^{n/2-1} \sum_{i \in S(c)} (\lfloor \theta_{i,d} \rfloor_Q)^2,$$

где $\theta_{i,d}$ - коэффициент ДКП с индексом i из d -го блока коэффициентов ДКП субобласти A, а знак $\lfloor \cdot \rfloor_Q$ означает, что энергия вычисляется у квантованных коэффициентов. Энергия субобласти B вычисляется аналогичным способом.

Центральную роль, как в процессе встраивания, так и в процессе извлечения встроенной информации, играют энергии субобластей A и B, величина которых определяется четырьмя факторами:

характером субобластей A и B;

количеством блоков p на одну выбранную область;

шагом квантователя;

размером подмножества $S(c)$ – высокочастотных компонент изображения.

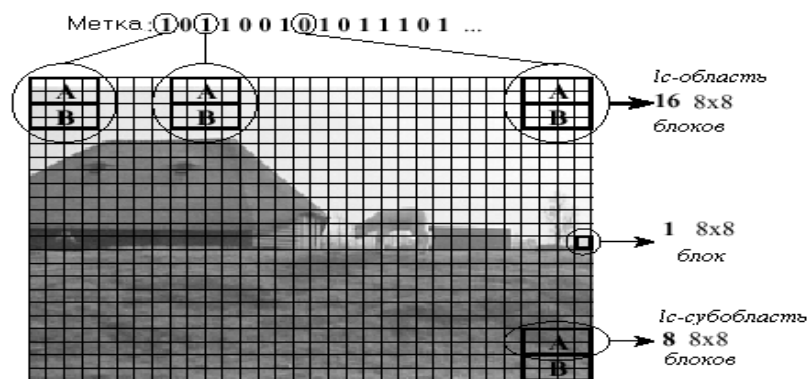


Рис.1. Позиции битов ЦВЗ в I-кадре

В результате проведенной работы был реализован алгоритм MPEG-2, допускающий встраивание в него текстовой информации, для цветных и черно-белых видеоизображений с различными характеристиками и коэффициентами сжатия, а также текстов различного размера.

Библиографический список

1. Быков С. Ф. Алгоритм сжатия JPEG с позиции компьютерной стеганографии // Защита информации. Конфидент. — СПб., 2000. — № 3.
2. Васильева Е. Цифровая стеганография [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://rain.ifmo.rii/cat/data/tiLeorT/coding/steganography-2006/article.pdf>, свободный.
3. Грибунин В. Г., Оков И. Н., Туринцев И. В. Цифровая стеганография. — М.: Солон-Пресс, 2002. — 272 с.
4. Кустов В.Н., Федчук А.А. Методы встраивания скрытых сообщений // Защита информации. Конфидент. — 2000. — №3.

КЛЕТОЧНЫЕ АВТОМАТЫ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В.А. Васильев, П.С.Чернов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Клеточные автоматы получили широкое распространение в задачах моделирования сложных процессов благодаря способности воспроизводить сложные структуры и возможности легкой реализации алгоритма на

компьютере. Простейший клеточный автомат представляет собой набор клеток (ячеек) с заданными правилами перехода, определяющими состояние клетки в следующий момент времени через состояние клеток в текущий момент времени.

Существуют аналогии между решением дифференциального уравнения методом конечных разностей и клеточными автоматами. Метод конечных разностей представляет собой дискретизацию дифференциального уравнения на сетке конечных размеров и описывает временную эволюцию системы дискретными интервалами времени. Клеточный автомат также описывает эволюцию системы на дискретной сетке в дискретные временные интервалы. Если число состояний клеточного автомата сравнимо с аналогичным числом в конечноразностном решении, то результаты моделирования должны совпадать. Так, например, одномерное уравнение теплопроводности и его конечноразностный аналог выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$T_i^{t+1} - T_i^t = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^t - 2T_i^t + T_{i-1}^t), \quad (2)$$

где T – температура; k – положительный коэффициент, характеризующий теплопроводность материала; t, i – временные и пространственные индексы.

Если выбрать временные и пространственные шаги дискретизации так, чтобы $k\Delta t/(\Delta x)^2 = 1$, то получим:

$$T_i^{t+1} = (T_{i+1}^t + T_i^t + T_{i-1}^t) - 2T_i^t. \quad (3)$$

Данное выражение можно рассматривать как правило клеточного автомата i -й ячейки. Поведение такого клеточного автомата будет аналогично конечноразностному решению дифференциального уравнения.

Этот алгоритм построения клеточного автомата из дифференциального уравнения можно применять и к стохастическим дифференциальным уравнениям в частных производных. Так, уравнение Эдвардса-Вилкинсона, описывающее рост поверхности в процессе осаждения частиц, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = v_0 + \mu(\vec{x}, t) + v\nabla^2 h(\vec{x}, t), \quad (4)$$

где $h(\vec{x}, t)$ – толщина пленки в точке $\vec{x}$ в момент времени t ; v_0 – скорость осаждения; $\mu(\vec{x}, t)$ – шум с нормальным распределением.

Изменение профиля поверхности во времени $\partial h(\vec{x}, t) / \partial t$ зависит от процесса сглаживания поверхности, характеризуемого слагаемым $v \nabla^2 h(\vec{x}, t)$, и поступления новых частиц к поверхности, имитируемых гауссовым шумом $\mu(\vec{x}, t)$.

Однако в случае стохастических дифференциальных уравнений существует возможность моделирования таких систем вероятностными клеточными автоматами. В отличие от детерминированных клеточных автоматов состояние ячейки вероятностного клеточного автомата определяется не детерминированным правилом, а на основе определенным образом вычисляемых вероятностей.

Осаждение новых частиц на поверхность эквивалентно увеличению толщины профиля на одну относительную единицу в случайно выбранных местах, количество которых зависит от скорости осаждения. Сглаживание поверхности в таком клеточном автомате можно смоделировать поверхностной диффузией вновь поступивших на поверхность частиц в соседние клетки. Вероятность диффузии в одну из соседних точек должна зависеть от значения толщины в данной точке и ее ближайших соседей. По аналогии со слагаемым $v \nabla^2 h(\vec{x}, t)$ уравнения (4) эту вероятность целесообразно сделать зависящей от конечноразностного выражения для лапласиана. С учетом известной из статистической механики формулы связи энергии состояния с его вероятностью и отождествлением энергии клетки с конечноразностной аппроксимацией лапласиана получим выражение для вероятности диффузии частицы в соседнюю точку i [1]:

$$p_i(t) = \rho e^{\frac{\alpha}{kT}(h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1})}, \quad (5)$$

где k – постоянная Больцмана; T – температура; ρ – нормирующий коэффициент; α – коэффициент, зависящий от осаждаемого материала.

Процесс роста тонких плёнок, моделируемый таким клеточным автоматом, воспроизводит поверхности с морфологией, близкой к реальным образцам, и позволяет исследовать влияние параметров процесса осаждения на морфологию пленок.

Библиографический список

1. Чернов П.С., Васильев В.А. Модель роста поверхности тонких плёнок материалов // Инновационные технологии. – Ульяновск: УлГУ, 2010. – №3. – С. 42–50.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДАТЧИКОВ ДАВЛЕНИЯ

С.А. Москалев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В настоящее время основная масса датчиков давления выпускается на основе чувствительных элементов, принципом действия которых является измерение деформации тензорезисторов, сформированных на мембране. Под действием давления измеряемой среды мембрана прогибается, тензорезисторы меняют свое сопротивление, что приводит к разбалансу тензометрического моста, который линейно зависит от степени деформации тензорезисторов и, следовательно, от приложенного давления.

Поскольку чувствительность датчика зависит от используемой для расположения тензорезисторов той или иной зоны деформации мембраны, нужно более точно подходить к вопросу определения таких зон.

Один из способов определения мест расположения тензорезисторов – это моделирование воздействия давления на трёхмерную модель чувствительного элемента. Данную задачу позволяет решить программа трёхмерного проектирования SolidWorks.

Наибольшее распространение в датчиках давления получили мембраны квадратной формы, представленные на рис. 1.

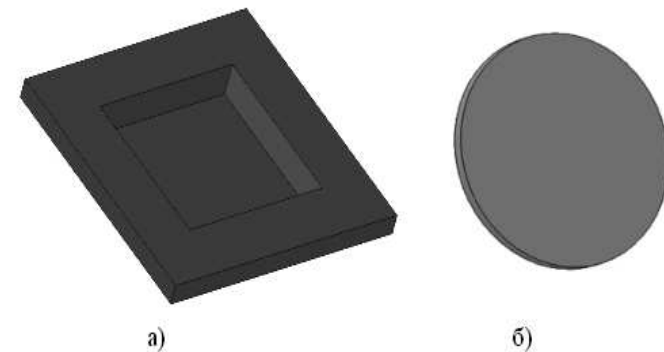


Рис. 1. Мембраны датчиков давления: а – квадратной формы;
б – круглой формы

Трёхмерная модель мембраны квадратной формы, представленная на рис. 1а, с центральной тонкой частью, обеспечивающей измерение

давлений, деформируется под воздействием равномерно распределенного по его площади давления. При этом на его поверхности возникают деформации. Деформированное состояние модели квадратной мембраны, деформированные области, возникающие на её поверхности, и шкала, связывающая визуальное и численные значения относительной деформации, представлены на рис. 2.

Широко используются и круглые мембраны. Один из вариантов такой мембраны представлен на рис. 1 б. Возникающие на поверхности кристалла круглой формы под воздействием давления относительные деформации представлены на рис. 3.

Как показали исследования, с помощью трёхмерного моделирования можно найти места оптимального размещения тензорезисторов на мембранах различной формы. Рисунки 2в, 2г и 3а, иллюстрируют результаты вычисления точных числовых значений относительных деформаций от приложенного давления, которые могут быть использованы для определения величины относительного изменения сопротивления тензорезисторов, установленных в данном месте.

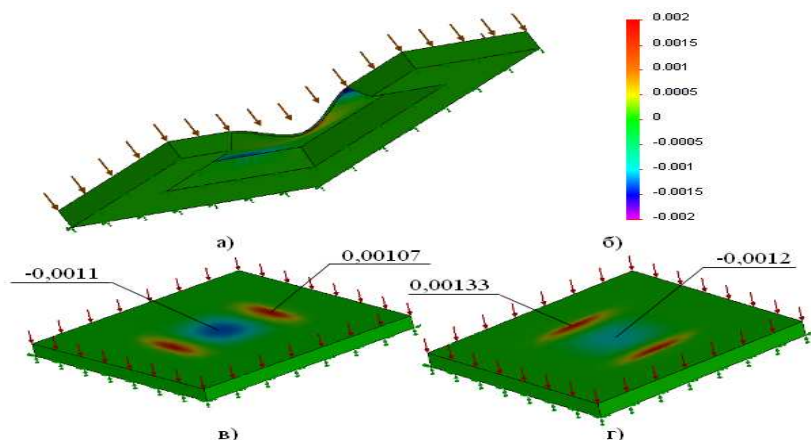


Рис. 2. Деформированное состояние мембраны квадратной формы:
а – деформированное состояние мембраны в разрезе; б – шкала;
связывающая значение относительной деформации и её
месторасположение на мембране; в и г – мембраны с зонами противо-
положных по знаку деформаций и числовыми значениями в максимумах
относительных деформаций

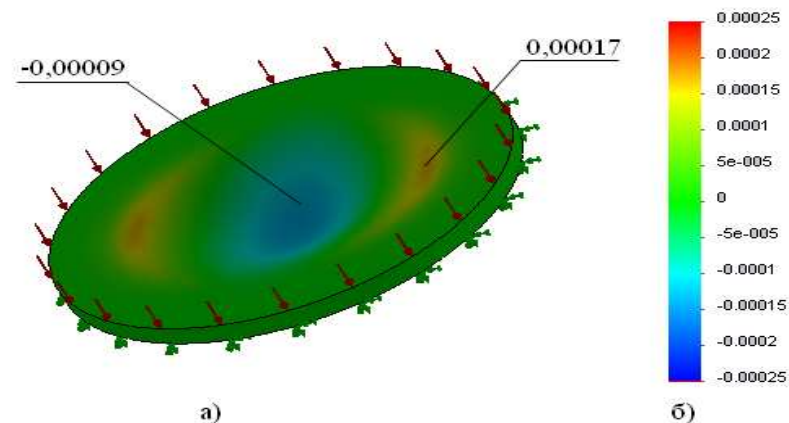


Рис. 3. Деформированное состояние мембраны круглой формы:
 а – зоны противоположных по знаку деформаций на поверхности мембраны
 и максимальные числовые значения относительных деформаций;
 б – шкала, связывающая значение относительной деформации
 и её месторасположение на мембране

Данные, полученные с помощью трехмерного моделирования, могут быть использованы при проектировании чувствительных элементов датчиков давления.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ МОДЕЛЬ МИКРОМОЩНОГО МАСШТАБИРУЮЩЕГО УСИЛИТЕЛЯ

И.А. Долгова, Б.В. Чувькин, И.А. Сидорова

Пензенский государственный университет,
 г. Пенза, Россия

Минимизация тока потребления является системным требованием к элементам измерительных каналов, в том числе и к масштабирующим усилителям с многокаскадной структурой на базе программируемых ОУ. Ток потребления программируемых ОУ устанавливается внешней цепью (программируется), что позволяет минимизировать ток потребления масштабирующего усилителя с многокаскадной структурой в виде последовательно соединённых программируемых ОУ, который может быть описан мультипликативной моделью.

Математически задача минимизации тока потребления микромощного масштабирующего усилителя формулируется как задача нахождения числа n каскадов программируемых ОУ при выполнении требований по полосе пропускания, коэффициенту усиления и динамическому диапазону.

Анализ данной задачи показал, что существует оптимальное количество каскадов n , при котором имеет место минимум общего (суммарного) тока потребления:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n,$$

где $I_1, I_2, \dots, I_n$ – ток потребления соответствующего ОУ.

Для программируемых ОУ при фиксированной полосе частоты пропускания коэффициент усиления $k_{\text{усил}}(I)$ пропорционален току потребления:

$$k_{\text{усил}}(I) = \frac{k_0 \cdot I}{I_0} + I_{\text{нач}},$$

где k_0 – коэффициент усиления при токе I_0 ; $I_{\text{нач}}$ – постоянная компонента тока потребления.

При условии, что все каскады усилителя имеют одинаковый ток потребления, а постоянная компонента тока потребления равна нулю, ток потребления k -го каскада будет равен:

$$I_k(n) = \frac{I_{\text{общ}}}{n},$$

где $I_{\text{общ}}$ – общий ток потребления масштабирующего усилителя.

Коэффициент усиления $K(n)$ масштабирующего усилителя со структурой из n каскадов определяется как произведение коэффициентов усиления каждого каскада:

$$K(n) = k_{\text{усил}}(I)_1 \cdot k_{\text{усил}}(I)_2 \cdot \dots \cdot k_{\text{усил}}(I)_n.$$

Из этого следует, что

$$K(n) = \left(\frac{k_0 \cdot I_{\text{общ}}}{n \cdot I_0} \right)^n.$$

Максимальное значение коэффициента усиления K_{max} имеет место для

$$n = \left(\frac{k_0 \cdot I_{общ}}{e \cdot I_0} \right),$$

и равно

$$K_{\max} = \exp \left(\frac{k_0 \cdot I_{общ}}{e \cdot I_0} \right).$$

Эта формула позволяет найти минимальное значение общего тока потребления $I_{общ} = I_{\min}$ при условии, что коэффициент усиления K задан. Для этого необходимо сделать подстановку $K_{\max} = K$::

$$I_{\min} = \left(\frac{e \cdot I_0}{k_0} \right) \cdot \ln K.$$

Если учесть начальный ток потребления $I_{нач}$, то

$$I_{\min} \approx \left(\frac{e \cdot I_0}{k_0} \right) \cdot \ln K + n \cdot I_{нач}.$$

Данная формула справедлива при условии $I_{нач} < \frac{I_{общ}}{n}$, что в большинстве случаев выполняется.

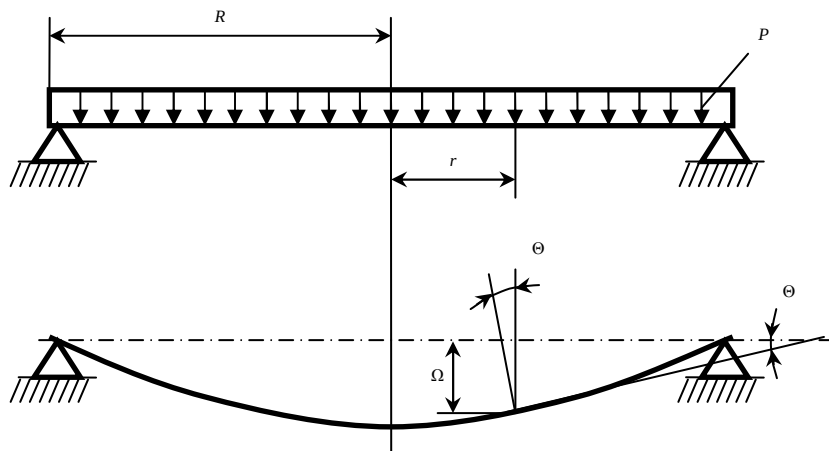
Таким образом, предложенная мультипликативная модель позволяет аналитически решать задачу минимизации тока потребления микромощного масштабирующего усилителям с многокаскадной структурой на базе программируемых ОУ.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБОВ ТОНКОСТЕННЫХ ПЛАСТИН ПОСЛЕ ФИНИШНОЙ ОБРАБОТКИ

Н.Я Карасев

Пензенский государственный университет,
г.Пенза, Россия

После финишной механической обработки (плоской доводки поверхности пластин) в результате действия напряжений в поверхностном слое тонкостенных пластин чувствительных элементов датчиков давления они получают прогиб. Можно оценить величины этих прогибов по полученным экспериментальным данным о напряжениях в поверхностном слое пластин.



Действие на пластину распределенной нагрузки

Прогиб пластины обозначим через Ω , а угол поворота нормали – через Θ , которые связаны соотношением (рисунок):

$$\Theta = -\frac{d\Omega}{dr}, \quad (1)$$

где r – элемент радиуса.

Выделим элемент пластины двумя радиальными сечениями, угол между которыми $d\varphi$, и двумя дуговыми сечениями, одно из которых расположено на окружности r , а второе – на окружности радиуса $(r + dr)$. Изобразим усилия в срединной плоскости, поперечные силы и изгибающие моменты.

Равнодействующие поперечные силы Q , направленные по оси z , будем учитывать интенсивностью этих сил, приходящихся на единицу длин дуг $r \cdot d\varphi$ и $(r + dr) \cdot d\varphi$. Моменты учитываются также их интенсивностью, т.е. величиной момента, приходящейся на единицу длин сечения, т.е. $r \cdot d\varphi$ и dr . Внешняя сила, действующая на элемент $G \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr$, где G – величина напряжения, возникающая в поверхностном слое пластины. Напряжения и деформации в сечениях выделенного элемента связаны соотношением (2).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \left(\frac{dQ}{dr} + \mu \frac{Q}{r} \right) \\ \sigma_t &= \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \left(\frac{Q}{r} + \mu \frac{dQ}{dr} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; z – расстояние текущей плоскости от срединной. Используя эти зависимости, найдем равнодействующие моменты на гранях $(h - r \cdot d\phi)$ и $(h - dr)$:

$$M_r \cdot r \cdot d\phi = r \cdot d\phi \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r \cdot z \cdot dz = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{dQ}{dr} + \mu \frac{Q}{r} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot dz;$$

$$M_t \cdot dr = dr \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t \cdot z \cdot dz = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{Q}{r} + \mu \frac{dQ}{dr} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot dz.$$

Поскольку $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot dz = \frac{h^3}{12}$, можно записать:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D \cdot \left(\frac{dQ}{dr} + \mu \frac{Q}{r} \right) \\ M_t &= D \cdot \left(\frac{Q}{r} + \mu \frac{dQ}{dr} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где $D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ – жесткость пластины на изгиб.

Составив уравнение суммы моментов всех сил относительно Y , касательной к дуге круга радиуса r в срединной плоскости и отбрасывая величины высшего порядка, получим:

$$\begin{aligned} &-(M_r + dM_r) \cdot (r + dr) \cdot d\phi + M_r \cdot r \cdot d\phi + G \cdot r \cdot d\phi \cdot dr \frac{dr}{2} + \\ &+ 2 \cdot M_t \cdot dr \cdot \frac{d\phi}{2} - (Q + dQ) \cdot (r + dr) \cdot d\phi \cdot dr = 0, \end{aligned}$$

или

$$-M_r - r \cdot \frac{dM_r}{dr} + M_t - Q \cdot r = 0$$

и окончательно имеем:

$$M_t - \frac{d}{dr}(M_r \cdot r) = Q \cdot r. \quad (4)$$

Подставляя M_r и M_t из (3) в (4), получаем при постоянной жесткости D :

$$\frac{Q}{r} - \frac{dQ}{dr} - r \frac{d^2 Q}{dr^2} = \frac{Q \cdot r}{D}. \quad (5)$$

Поскольку

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (Q \cdot r) \right] = \frac{d^2 Q}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dQ}{dr} - \frac{1}{r^2} \cdot Q,$$

выражение (5) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (Q \cdot r) \right] = -\frac{Q}{D}.$$

Выражение для перемещений можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Omega &= \int Q \cdot dr = -\frac{G}{16 \cdot D} \cdot \int \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot R^2 \cdot r - r^3 \right) dr + C_3 = \\ &= -\frac{G}{16 \cdot D} \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{R^2 \cdot r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) + C_3. \end{aligned}$$

Постоянную C_3 находим из условия, что на контуре ($r = R$) перемещение равно 0:

$$\Omega_{r=R} = 0.$$

Тогда

$$C_3 = \frac{G \cdot R^2}{32 \cdot D} \cdot \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot R^2 - \frac{R^2}{2} \right).$$

Перемещение определится как

$$\Omega = \frac{G \cdot R^2}{32 \cdot D} \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot R^2 - \frac{R^2}{2} \right) - \frac{G}{16 \cdot D} \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{R^2 \cdot r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right),$$

после преобразований получим:

$$\Omega = \frac{G}{16 \cdot D} \left(\frac{5+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{R^4}{4} - \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{R^2 \cdot r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right). \quad (6)$$

Постоянную C_3 находим из условия, что на контуре ($r = R$) перемещение равно 0.

Исследуя на экстремум зависимость (6), находим наибольший прогиб, который имеет место при $r = 0$:

$$\Omega_{\max} = \frac{G \cdot R^4}{64 \cdot D} \cdot \frac{(5 + \mu)}{(1 + \mu)}. \quad (7)$$

Задавая величины напряжений G по литературным и производственным данным, а также напряжениям, полученным после проведения эксперимента, можно оценить величины прогибов и сравнить их с точностными параметрами, а именно, с отклонением от плоскостности и отклонением от параллельности.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Ю.С. Семерич, Д.В. Тарасов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Одним из наиболее значительных достижений в области оптических технологий за последнее десятилетие является создание оптических волноводных структур нового типа, получивших в отечественной литературе название дырчатых или фотонно-кристаллических волноводов [1].

В основе таких структур используется фотонно-кристаллическое волокно, представляющее собой кварцевую или стеклянную микроструктуру с периодической либо аperiodической системой цилиндрических воздушных отверстий, ориентированных вдоль оси волокна, образованных набором плотно упакованных и вытянутых при высокой температуре полых стеклянных волокон (рис. 1). Дефект микроструктуры, соответствующий отсутствию нескольких воздушных отверстий в центре, служит сердцевиной волокна, обеспечивая волноводный режим распространения электромагнитного излучения.

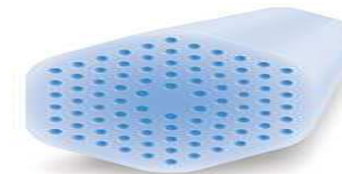


Рис. 1. Дырчатый волновод

Благодаря периодическому расположению воздушных отверстий в стекле спектр пропускания подобной структуры для определенных направлений характеризуется наличием фотонных запрещенных зон – областей частот, в которых излучение не может проникать в оболочку волновода. Кроме этого, одно из основных преимуществ дырчатых волноводов связано с возможностью реализации в них одномодового режима распространения излучения в очень широкой спектральной области. Такой эффект достигается за счет изменения эффективного показателя преломления оболочки при варьировании частоты излучения. В результате дырчатые волноводы представляют значительный интерес как в связи с проблемами волоконной оптики, так и для решения многих актуальных задач нелинейной оптики, атомной оптики, физики фотонных кристаллов и квантовой электродинамики, высокоточных оптических измерений частоты, медицинской оптики и передачи информации.

Основными задачами исследования дырчатого волновода являются проблема отыскания его мод и расчет структуры фотонной запрещенной зоны. Математической моделью процесса распространения электромагнитного излучения в волноводе является краевая задача Дирихле или Неймана для уравнения Гельмгольца.

В настоящей работе для решения краевой задачи используется метод R-функций, согласно которому решение представляется в виде структуры решения, представляющей собой пучок функций, точно удовлетворяющего заданным граничным условиям [2]. В общем виде структура решения может быть представлена как $u = B(\Phi, \omega)$, где B – оператор, зависящий от формы границы $\partial\Omega$ области Ω и от типа граничных условий; Φ – неопределенная функциональная компонента, подлежащая определению; ω – функция, соответствующая области Ω , в которой строится решение краевой задачи. С методами построения функции ω для геометрических объектов, обладающих симметрией, можно познакомиться в работах [2 – 4].

При построении структур решения краевых задач Дирихле или Неймана основной трудностью является построение функции ω , отвечающей геометрическому объекту, представленному на рис. 1. Поэтому для решения этой задачи в данной работе предлагается воспользоваться следующим подходом. Зададим области

$$\omega_1 = (r^2 - \mu_{x1}^2 - \mu_{y1}^2) / 2r,$$

$$\text{где } \mu_{x1} = \frac{4h_x}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{\pi x}{h_x} \right]}{(2k-1)^2};$$

$$\mu_{y1} = \frac{4h_y}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{\pi y}{h_y} \right]}{(2k-1)^2},$$

$$\omega_2 = (r^2 - \mu_{x2}^2 - \mu_{y2}^2) / 2r,$$

$$\text{где } \mu_{x2} = \frac{4h_x}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{\pi(x-h_x/2)}{h_x} \right]}{(2k-1)^2},$$

$$\mu_{y2} = \frac{4h_y}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{\pi(y-h_y/2)}{h_y} \right]}{(2k-1)^2},$$

$$\omega_3 = r_1 - x_1, \quad \omega_4 = r_2 - x_1,$$

$$\text{где } x_1 = \rho \cos \mu_1, \quad \mu_1 = \frac{8}{n_0 \pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{n_0 \varphi}{2} \right]}{(2k-1)^2}, \quad \text{а } \rho, \varphi \text{ — пере-}$$

менные полярной системы координат.

В приведенных выражениях буквенные параметры $r, h_x, h_y, r_1, r_2, n_0$ определяют геометрические размеры области.

Тогда нормализованное уравнение границы области будет иметь вид:

$$\omega(x, y) = (\overline{\omega_1 \vee_{\alpha} \omega_2}) \vee_{\alpha} \omega_3 \wedge_{\alpha} \omega_4 = 0,$$

где символы $\wedge_{\alpha}, \vee_{\alpha}$ означают R-операции из системы $\mathfrak{R}_{\alpha}$:

$$\text{R — дизъюнкция } x \vee_{\alpha} y = \frac{1}{1+\alpha} \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right);$$

$$\text{R — конъюнкция } x \wedge_{\alpha} y = \frac{1}{1+\alpha} \left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right);$$

$$\text{R — отрицание } \overline{x} = -x,$$

где $\alpha = \alpha(x, y)$ и при этом $-1 < \alpha \leq 1$.

На рис. 2 представлена картина линий уровня функции $\omega(x, y)$.

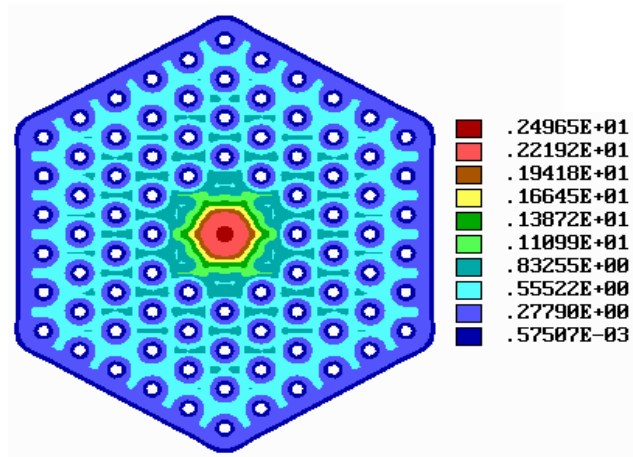


Рис. 2. Картина линий уровня функции $\omega(x, y)$

Заметим, что $\omega(x, y)$ является нормализованной.

Библиографический список

1. Желтиков А.М. Дырчатые волноводы // Успехи физических наук. – 2000. – Т. 170, № 11. – С. 1203 – 1215.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
3. Семерич Ю.С., Шейко Т.И. Методы математического моделирования нормализованных уравнений симметричных локусов // Физико-матем. науки, Биологич. науки / Вестник Запорожского государств. университета: сборник науч. статей – Запорожье: ЗГУ. – 2003. – № 1. – С. 71 – 84.
4. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПИРАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ

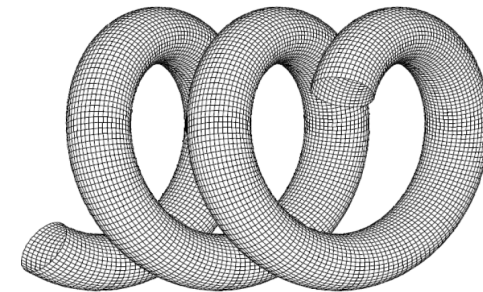
Е.Г. Романова, Ю.С. Семерич

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Среди приборов современной техники сверхвысоких частот (СВЧ) наибольшее распространение получили замедляющие системы. Важной особенностью таких систем является то, что они позволяют формировать и направлять медленные электромагнитные волны, т.е. такие, фазовая скорость распространения которых меньше скорости света в вакууме. Медленные волны обуславливают возможность эффективного взаимодействия с ними заряженных частиц, что используется для возбуждения и усиления электромагнитных колебаний сверхвысоких частот.

Одним из эффективных способов получения медленных электромагнитных волн является использование спирального волновода. При этом отличительной и весьма существенной особенностью спирального волновода является отсутствие граничной (критической) частоты, а фазовая скорость волны вдоль оси спирали пропорциональна шагу спирали и обратно пропорциональна радиусу спирали.

Поверхность спирального волновода представляет собой круговую винтовую поверхность с образующей окружностью постоянного радиуса, лежащей в плоскости, проходящей через винтовую ось (рисунок).



Фрагмент спирального волновода

К основным задачам исследования спирального волновода относятся расчет дисперсии, сопротивления связи, потока энергии, а также

определение полос запирания в дисперсионной характеристике и конфигурации полей.

Математической моделью процесса распространения электромагнитных волн в спиральном волноводе является краевая задача Дирихле (для Е-волн) или Неймана (для Н-волн) для уравнения Гельмгольца. В данной работе для решения таких краевых задач предлагается использовать метод R-функций. В соответствии с этим методом решение задается в виде структуры решения, представляющей собой пучок функций, точно удовлетворяющего заданным граничным условиям [1]. В общем виде структура решения может быть представлена как $u = B(\Phi, \omega)$, где B – оператор, зависящий от формы границы $\partial\Omega$ области Ω и от типа граничных условий; Φ – неопределенная функциональная компонента, подлежащая определению; ω – функция, соответствующая области Ω , в которой строится решение краевой задачи.

Для построения структур решения краевых задач Дирихле или Неймана необходимо уметь строить функцию ω , соответствующую поверхности, изображенной на рисунке. Поэтому для решения этой задачи в данной работе предлагается воспользоваться следующим подходом.

Зададим уравнение границы образующей области в виде $\omega(x, z) = 0$ и выполним подстановку: вместо z подставим

$z - \alpha \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, где $\alpha = \frac{H}{2\pi}$, в уравнение $\omega(x - r_c, z) = 0$. Таким образом,

получим уравнение $\omega_1(x, y, z) \equiv \omega\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_c, z - \alpha \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = 0$ бес-

конечной поверхности $\partial\Omega_1$, ограничивающей область Ω_1 круговой винтовой поверхности с шагом H и поперечным сечением $\partial\Omega$.

Библиографический список

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

**ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ КРОНИГА – ПЕННИ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСЧЕТУ ПРИМЕСНОЙ ЗОНЫ
В КВАНТОВОЙ ПРОВОЛОКЕ С ОДНОМЕРНОЙ
СВЕРХРЕШЕТКОЙ ИЗ ПОТЕНЦИАЛОВ НУЛЕВОГО РАДИУСА**

А.В. Разумов, В.А. Гришанова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Развитие полупроводниковой наноэлектроники стимулировало интерес к исследованию примесных центров молекулярного типа в структурах с пониженной размерностью в условиях внешнего магнитного поля. Наложение размерного и магнитного квантования дает новые возможности для управления термами примесных молекулярных состояний, при этом важную роль играют расстояние между примесными атомами и пространственная конфигурация примесной молекулы в объеме наноструктуры. В случае D^- -, D_2^- и D_3^- -центров удовлетворительной моделью для описания локализованных электронных состояний является модель потенциала нулевого радиуса, которая позволяет получить аналитическое решение для волновой функции связанного электрона, а также дисперсионные уравнения для определения энергии связи (D^- -состояние) либо термов примесных молекулярных ионов (D_2^- - и D_3^- -состояния) в наноструктурах. Во всех упомянутых выше применениях метода изучалось движение электрона в поле конечного числа потенциалов нулевого радиуса во внешнем магнитном поле: в параболической квантовой яме, в квантовой проволоке (КП) и в квантовой точке.

В настоящей работе рассматривается случай бесконечного числа потенциальных ям в КП (модель полимерной молекулы), когда дополнительно возникает математическая задача о вычислении бесконечных сумм по всем примесным центрам. Следует отметить, что вычисление сумм облегчается в том физически важном случае, когда одинаковые потенциальные ямы нулевого радиуса расположены регулярно и образуют периодическую структуру типа кристалла. Подобные системы могут рассматриваться как обобщение известной модели Кронига – Пенни, в которой исследуется движение электрона в поле одномерной периодической цепочки в одномерном пространстве. Для описания одноэлектронных состояний в КП использовался потенциал двумерного гармонического осциллятора

$U(\rho) = m^* \omega_0^2 \rho^2 / 2$, где m^* – эффективная масса электрона; ω_0 – характерная частота удерживающего потенциала КП; $\rho \leq L$; L – радиус КП.

Потенциал регулярной цепочки D^0 -центров в КП моделировался суперпозицией потенциалов нулевого радиуса (в цилиндрической системе координат):

$$V_\delta(\rho, \varphi, z; 0, 0, \rho a_0) = \gamma \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(\rho) \delta(\varphi) \delta(z - \rho a_0) \left[1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + (z - \rho a_0) \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (1)$$

где γ – мощность потенциалов нулевого радиуса; a_0 – период цепочки D^0 -центров в КП.

Векторный потенциал магнитного поля $\vec{A}(\vec{r})$ выбран в симметричной калибровке $\vec{A} = [\vec{B}, \vec{r}] / 2$ так, что $\vec{A} = (-y B / 2, x B / 2, 0)$. В рамках обобщенного варианта модели Кронига – Пенни получено уравнение, определяющее зависимость энергии связанного состояния электрона, локализованного в поле регулярной цепочки D^0 -центров в КП, от величины внешнего магнитного поля и параметров структуры:

$$\eta_i = \eta_B - \frac{2 \exp(-a_0^* \eta_B) (\cos q_e a_0 - 1)}{a_0^* [1 - \exp(-a_0^* \eta_B)]} + \frac{2}{a_0^*} \ln |1 - \exp(-a_0^* \eta_B)| -$$

$$- \frac{w}{2\beta} \eta_B^{-1} \left\{ 1 + \frac{\exp(-a_0^* \eta_B) \cos q_e a_0 - \exp(-2a_0^* \eta_B)}{[1 - \exp(-a_0^* \eta_B)]^2} \right\}, \quad (2)$$

где $\eta_B = \sqrt{\eta^2 + w\beta^{-1}}$; $w = \sqrt{1 + \beta^2 a^{*-4}}$; $\beta = L^* / (4\sqrt{U_0^*})$; $L^* = 2L/a_d$;

$U_0^* = U_0/E_d$; U_0 – амплитуда потенциала конфайнмента КП; a_d и E_d – эффективный боровский радиус и эффективная боровская энергия соответственно; $a^* = a_B/a_d$; a_B – магнитная длина; $\eta^2 = |E_\lambda|/E_d$; E_λ – собственные значения оператора Гамильтона $\mathbf{H}_\delta = \mathbf{H}_0 + U_{(\rho)} + V_\delta(\rho, \varphi, z; 0, 0, \rho a_0)$; q_e – квазиимпульс электрона в КП; $\eta_i^2 = |E_i|/E_d$; E_i – энергия связи локализованного электрона в объемном полупроводнике; $a_0^* = a_0/a_d$.

При $q_e a_0 = 0$ и $q_e a_0 = \pi$ уравнение (2) распадается на два уравнения, определяющих границы примесной зоны. На рис. 1 представлена зависимость ширины примесной зоны $\Delta\epsilon$, рассчитанная с помощью уравнения (2), в КП на основе InSb от величины внешнего магнитного поля B для различных значений периода цепочки a_0^* , нормированного на эффективный боровский радиус. Можно видеть, что с ростом величины B ширина примесной зоны уменьшается за счет уменьшения степени перекрытия одноцентровых волновых функций (эффект магнитного вымораживания локализованных состояний). Аналогичная ситуация имеет место с ростом периода регулярной цепочки (сравн. кривые 2 и 1 на рис. 1).

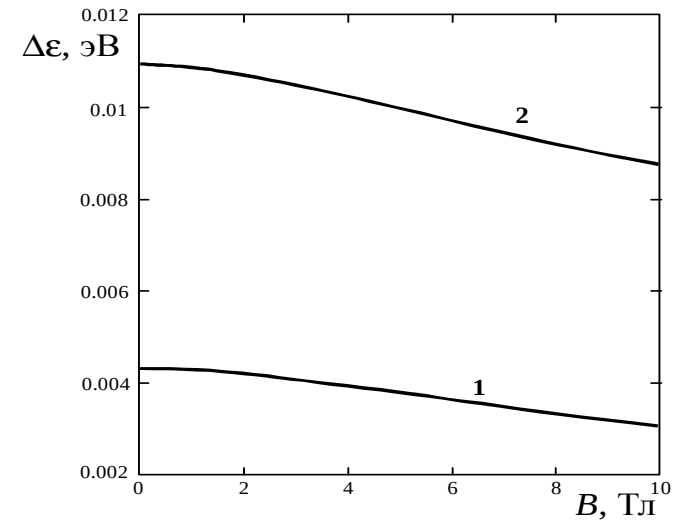


Рис. 1. Зависимость ширины примесной зоны в КП на основе InSb от величины магнитной индукции B при $U_0 = 0,3$ эВ, $E_i = 5$ мэВ, $L = 70$ нм для различных значений периода регулярной цепочки:

$$1 - a_0 = 35 \text{ нм}; 2 - a_0 = 28 \text{ нм}$$

Получена аналитическая формула для эффективной массы m_i^* электрона в примесной зоне, которая в общем случае определяется как

$$m_i^* = -\frac{\hbar^2}{E_d} \left(\frac{\partial^2 (\eta^2)}{\partial q_e^2} \right)^{-1} \Big|_{q_e=0}, \quad (3)$$

где $\eta^2(q_e)$ – неявно заданная функция (см. уравнение (2)).

На рис. 2 приведена зависимость m_i^* , нормированной на эффективную массу электрона в зоне проводимости КП, от периода цепочки a_0^* и величины внешнего магнитного поля. Видно, что с ростом величины внешнего магнитного поля m_i^* возрастает, и когда период регулярной цепочки становится больше эффективного боровского радиуса электрона, m_i^* оказывается равной эффективной массе электрона в зоне проводимости КП.

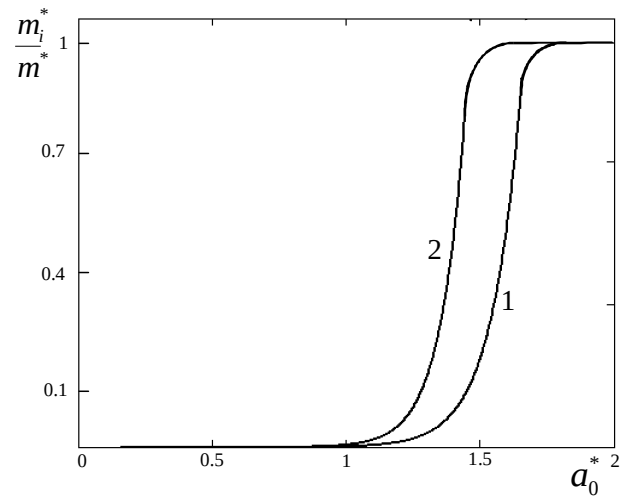


Рис. 2 Зависимость эффективной массы электрона в примесной зоне m_i^* от периода цепочки D^0 -центров a_0^* в КП при $U_0 = 0,2$ эВ, $E_i = 7$ мэВ, $L = 70$ нм: 1 – $B = 0$; 2 – $B = 10$ Тл

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ДВУХСЛОЙНЫМ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ОБРАЗЦА МАТЕРИАЛА

Д.И. Васюнин

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Постановка обратной задачи

Пусть в декартовой системе координат $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$ – волновод с идеально проводящей поверхностью ∂P . В волноводе расположено неоднородное анизотропное тело Q ($Q \subset P$ – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и функцией переменной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$. Функция $\varepsilon(x)$ является ограниченной функцией в области $\bar{Q}$, $\varepsilon \in L_\infty(Q)$, а также $\varepsilon^{-1} \in L_\infty(Q)$. Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая.

$$\text{Введем ток } \mathbf{J}(x) = \left[\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right] \mathbf{E}(x), \quad (1)$$

где $\mathbf{E}(x)$ – электрическое поле. Интегродифференциальное уравнение, к которому сводится обратная задача, имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right]^{-1} \mathbf{J}(x) &= \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\hat{G}_E(x, y)$ – (известный) диагональный тензор Грина [1].

В формуле (2) $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, ω – круговая частота. Параметры волновода выбраны так, чтобы $\pi/a < k_0 < \pi/b$. В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода. $\mathbf{E}^0(x) = \mathbf{e}_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} x_3}$ – известное падающее поле (мода в волноводе); $A^{(+)}$ – (известная) амплитуда

падающей волны; $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$; $\mathbf{e}_2$ – второй орт в декартовой системе координат.

Требуется определить диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(x)$, $x \in Q$ посредством серии измерений. Будем предполагать, что тело Q состоит из N подобластей Q_j , таких, что $Q = \bigcup_j Q_j$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset, i \neq j$. Мы предполагаем, что $\varepsilon(x) = \varepsilon^{(j)}$ при $x \in Q_j$, т.е. в каждой подобласти диэлектрическая проницаемость постоянна. Тогда общее число неизвестных параметров будет равно N .

При измерениях изменяются частоты $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(N)}$ (происходит сканирование по частоте); при этом волновое число изменяется по формуле $k_0^{(i)} = \omega^{(i)} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Формулировка итерационного метода

Пусть тело имеет форму параллелепипеда

$$Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, \quad b_1 < x_2 < b_2, \quad c_1 < x_3 < c_2\}.$$

Выберем равномерную прямоугольную сетку в Q , образованную элементарными параллелепипедами.

Перенумеруем эти элементарные параллелепипеды с помощью одноиндексной нумерации Π_s , $s = 0, \dots, N_0 - 1$, $N_0 = N_1 N_2 N_3$.

Построим двухслойный итерационный процесс для решения обратной задачи по формулам:

$$\xi_n(x) = \left[\frac{\varepsilon_n(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right]^{-1}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \xi_n(x) \mathbf{J}_n(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}(x, y) \mathbf{J}_n(y) dy - \\ & - \text{grad div} \int_Q \hat{G}(x, y) \mathbf{J}_n(y) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_n(x) = \xi_n(x) \mathbf{J}_n(x), \quad (5)$$

$$F = A + k_0^2 \frac{1}{ab\gamma_{10}} \int_Q \sin\left(\frac{\pi y_1}{a}\right) e^{i\gamma_{10}^{(2)} y_3} \eta_{n+1}(y) \mathbf{E}_n(y) \cdot \mathbf{e}_2 dy, \quad (6)$$

где
$$F = \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} Q_1^{(+)}, \quad A = \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} A^{(+)}, \quad \eta_n(x) = \left[\frac{\varepsilon_n(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right],$$

$$\xi_n(x) = \eta_n^{-1}(x).$$
 (7)

Численные результаты

Ниже на рисунке представлены результаты расчетов относительной диэлектрической проницаемости двухслойным итерационным методом для случая неоднородного тела, состоящего из двух секций:

$$Q_1 = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < c_1\}$$

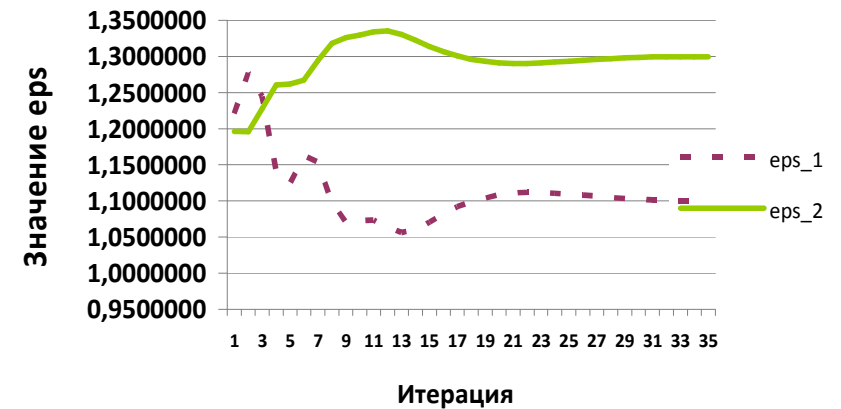
$$Q_2 = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, c_1 < x_3 < c\}.$$

Параметры задачи:

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 2, \quad c_1 = 1, \quad k_0^{(1)} = 1,7, \quad k_0^{(2)} = 1,6, \quad N = 2, \quad N_0 = 8.$$

Начальное значение относительной диэлектрической проницаемости в каждой секции равнялось $\varepsilon_e = 1,2$. Точные значения, полученные в результате аналитического решения модельной задачи, равнялись $\varepsilon^{(1)} = 1,1$ в первой секции и $\varepsilon^{(2)} = 1,3$ во второй секции.

разбиение 4 к 6



Расчеты показывают высокую точность (порядка 0,4%) при определении относительной диэлектрической проницаемости образца. Метод быст-

ро сходится даже при выборе сильно отличающегося начального приближения от точного значения.

Библиографический список

1. Васюнин Д.И., Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г. Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 68–78.

ЭНТРОПИЙНАЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАТИВНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ШКАЛОЙ КВАНТОВАНИЯ

Б.В. Чувькин, Р.Г. Тер-Аракелян, И.А. Сидорова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Вопросам оценки информативности измерительных преобразователей с нелинейной шкалой квантования посвящено достаточное количество работ. Известный подход основан на вычислении вероятностных мер с использованием понятия энтропии как меры неопределённости по Хартли или Шеннону [1].

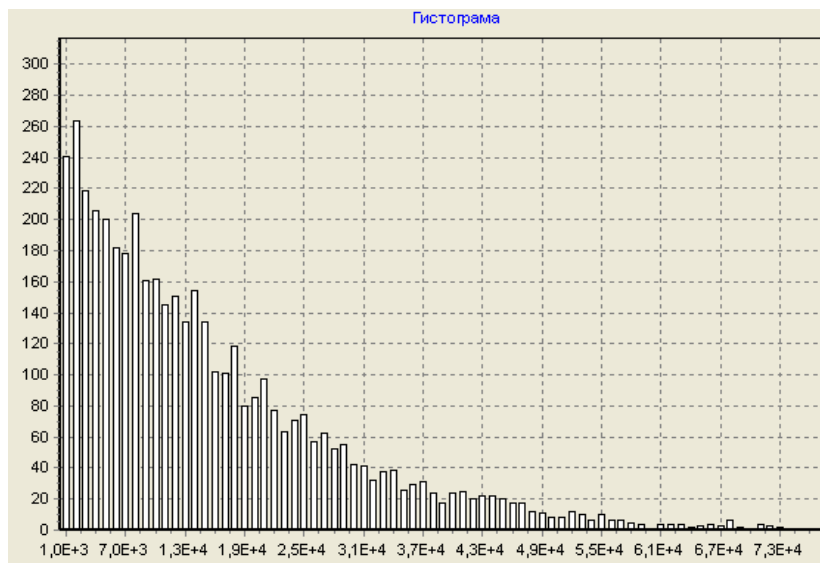
Целью настоящей работы является решение задачи оптимизации структурно-алгоритмических решений измерительных преобразователей по критерию точности (разрядности) аналого-цифрового преобразования. В качестве объекта исследования выбран интегрирующий АЦП, использующий сигма-дельта модулятор высокого порядка и цифровой фильтр-дециматор нижних частот.

Сигма-дельта модулятор представляет собой импульсную систему с нелинейной обратной связью, в прямом канале преобразования которого находится k -интеграторов, охваченных импульсной обратной связью через однобитный ЦАП. Выходная однобитная последовательность модулятора содержит информацию об амплитуде входного сигнала. Выходной многоуровневый код формируется путем усреднения (цифровой фильтрации) на конечном интервале времени.

При разработке необходимо выбрать структуру сигма-дельта модулятора (количество интеграторов) и коэффициенты обратной связи.

В качестве критерия, как правило, используется СКО шума квантования на выходе АЦП. Однако такой подход имеет такой недостаток, что требует однозначного задания алгоритма цифрового фильтра-дециматора, а это в случае использования адаптивных фильтров делает данный подход невозможным. Преодолеть этот недостаток можно путем использования метода, основанного на энтропийной оценке информативности измерительных преобразователей с нелинейной шкалой квантования. В данном случае нелинейная шкала квантования формируется в виде интервалов входной величины, которым однозначно соответствует уникальный бинарный код заданной длины, что достигается за счёт режима однократного измерения при нулевых начальных условиях интеграторов. В этом случае каждому входному воздействию соответствует единственная фазовая траектория состояния интеграторов в k -мерном пространстве.

Была разработана программа, основанная на математической модели описания динамических процессов преобразования входной величины в выходную однобитную последовательность заданной длительности при воздействии тестового сигнала, для набора статистики по вероятности появления уникальных однобитных кодов и соответствующих им интервалов входной величины. Наличие вероятности P_j появления каждого кода позволяет оценить информативность измерительного преобразователя с точки зрения уменьшения меры неопределённости по формуле Шеннона $I_{III} = \sum_{j=1}^K (-P_j \cdot \log_2 P_j)$, где k – количество кодов. Ниже на рисунке представлена гистограмма распределения количества кодов по вероятности их появления. Отметим, что значение интервала входной величины пропорционально вероятности соответствующего ему кода.



Гистограмма распределения выходных кодов как функция вероятности их появления (масштабный множитель по оси «х» равен 10^{-6})

Сопоставление результатов, полученных по данной методике, показало, что максимум функции информативности лежит в области потенциально неустойчивой работы модулятора, т.е. в такой форме этот критерий непригоден для непосредственного использования при решении задачи оптимизации структурно-алгоритмических решений измерительных преобразователей по критерию точности (разрядности) аналого-цифрового преобразования.

Было сделано предположение, что область оптимальных значений коэффициентов по критерию минимума СКО шума квантования совпадает с областью значений коэффициентов по критерию минимума разности оценки информативности по Хартли и Шеннону. В основу этого предположения положен тезис о том, что максимум количества информации соответствует равномерной шкале квантования, т.е. равновероятным значениям появления уникальных кодов [2]. В качестве примера был проведён расчёт для варианта сигма-дельта модулятора 3-го порядка и цифрового сплайн-фильтра-дециматора 3-го порядка с коэффициентов передискретизации 48. Было установлено, что оптимальное значение коэффициентов по критерию минимума СКО шума квантова-

ния совпало с областью значений коэффициентов по критерию минимума разности оценки информативности по Хартли и Шеннону с точностью до 0,5 бит при 12-битной разрядности АЦП.

Библиографический список

1. Новицкий П.В. Понятие энтропийного значения погрешности // Измерительная техника. – 1966. – №7. – С. 11 – 14.
2. Новицкий П.В. Основы информационной теории измерительных устройств. – Л.: Энергия, 1968. – 248 с.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

К.В. Иванов, П.П. Першенков, О.В. Башкиров

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Моделирование измерительного процесса на компьютере позволяет оптимально построить измерительный тракт и существенно упростить стадию макетного моделирования измерительного прибора.

В настоящей статье рассматривается опыт применения такого моделирования при измерении частоты сетевого напряжения.

В состав устройств измерения параметров показателей качества электросети (ПКЭ) согласно ГОСТ 13.109-97 [1] должно входить устройство измерения частоты электросети. Погрешность измерения частоты является составляющей погрешности приборов измерения ПКЭ, адаптируемых к периоду сигнала. Поэтому задача повышения быстродействия и точности измерения частоты непосредственно связана с задачей повышения быстродействия и точности измерения параметров ПКЭ электросети.

Для измерения частоты основной гармоники методом ТМЗС в системе MathLab разработана модель, показанная на рисунке. Блок «Istochnic» моделирует гармонический сигнал, содержащий высшие гармоники до 10-й включительно. Амплитуды гармоник соответствуют ГОСТ 13.109-97 [1], начальные фазы гармоник выбраны в произвольном порядке. Блок «discrete» моделирует АЦП 12-го порядка с частотой дискретизации 1 кГц.

Блоки «Delay» осуществляют задержку на заданное число отсчетов, что необходимо для измерения частоты, т.е. данные блоки обеспечивают выбор трех мгновенных значений.

Блок «datchik» контролирует переход измеряемого сигнала через ноль. Блоки «If» фиксируют моменты, когда $u_1 = u_3$ (при этом $u_2 = 0$), и отбрасывают соответствующие дискретные значения.

«Blok izmereniy» содержит функцию расчета частоты основной гармоники по трем мгновенным значениям.

Блок «Frequency» выводит результат измерения частоты основной гармоники.

Блок «Error Function» необходим для вычисления относительной погрешности измерения частоты основной гармоники. Результат измерения выводится в блок «Error».

Блок «Scope 1» совмещает блоки «Error Function» и «Error».

Построение различных цифровых фильтров в системе MathLab выполняется с помощью среды проектирования фильтров «Digital Filter Design». В качестве НЧ-фильтра будем рассматривать только КИХ-фильтры, поскольку они, как известно, имеют меньшую временную задержку. Проектирование КИХ-фильтра осуществим методом «Equiripple», заложенным в систему MathLab. Данный метод позволяет создать фильтр по заданным параметрам, при этом его порядок окажется минимально возможным.

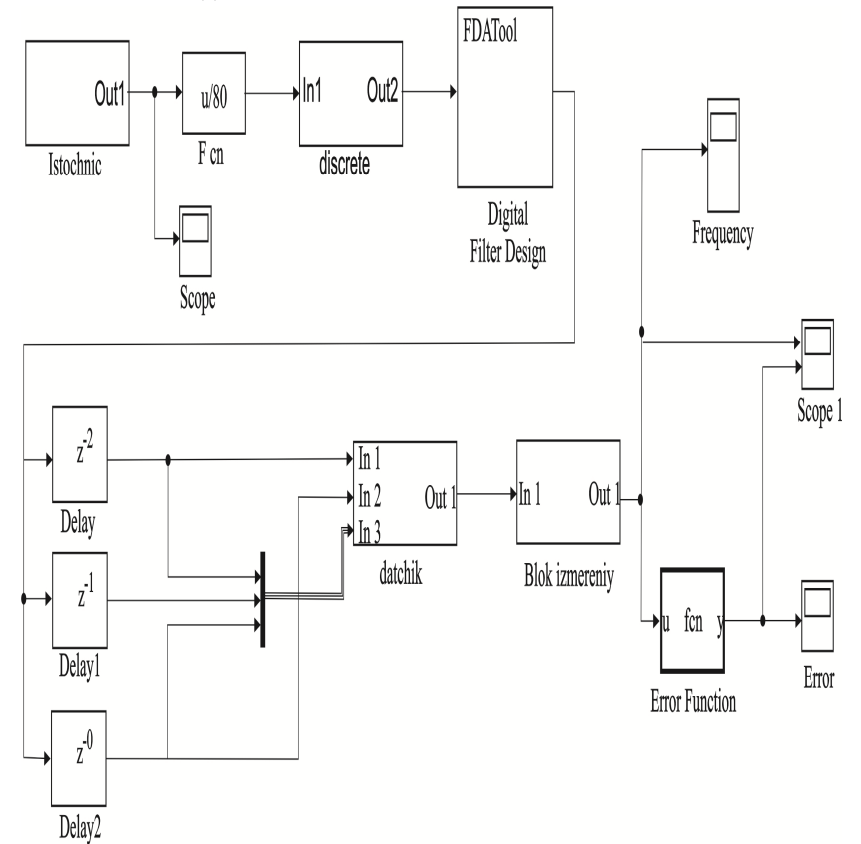
Блок «Istochnic» моделирует полигармонический сигнал с начальной фазой первой гармоники, равной 0° . Здесь на оси абсцисс – время измерения в секундах, по оси ординат – измеренное значение частоты (Гц) в верхней части осциллограммы, в нижней – относительная погрешность измерения (%). Рассматриваемый метод позволяет измерить частоту электросети с малым значением относительной погрешности.

В результате проведенного исследования возможности применения метода ТМЗС для измерения частоты электросети установлено, что нецелесообразно применять метод для измерения частоты электросети при наличии в сигнале высших гармоник без предварительной фильтрации измеряемого сигнала.

На примере модели измерения частоты с использованием КИХ-фильтра «Equiripple» показана принципиальная возможность использования метода трёх мгновенных значений сигнала (ТМЗС) для измерения частоты электросети с относительно высокой точностью. Установлена зависимость относительной погрешности измерения от начальной фазы основной гармоники и шага выборки дискретных значений. Обосновано, что при уменьшении порядка фильтра и соответственно уменьшении затухания в полосе задержания фильтра возможно уменьшить время измерения (временную задержку фильтра). Однако при этом также стоит ожидать и увеличения значений относительной по-

грешности, что показано на примере с использованием КИХ-фильтра, спроектированного по методу «наименьших квадратов». В этом случае относительная погрешность не превысила 1%, а время измерения составило один период измеряемой гармоники.

Поэтому при использовании цифровых ФНЧ возможно применение метода ТМЗС для измерения частоты электросети наряду с другими известными методами.



*Модель измерения частоты
основной гармоники методом ТМЗС*

Библиографический список

1. ГОСТ 13109-97. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения.
2. Михалин С. Н. Система автоматического контроля и учета количества электроэнергии: дис. ... канд. техн. наук. – М., 2005.
3. Мешков В.П. Определение параметров гармонических сигналов по минимуму мгновенных отсчетов: Препринт ИФСО–262Ф. / В.П.Мешков, В.Н.Угольников. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1984. – 7 с.
4. Мешков В.П. Методы измерения амплитуды гармонического сигнала за время менее периода / В.П.Мешков, В.Н.Угольников // Метрология. – 1984. – № 8. – С. 8 – 11.
5. Горлач А.А. Цифровая обработка сигналов в измерительной технике. – Киев, 1985.
6. Айфичер Э. Цифровая обработка сигналов. Практический подход / Э. Айфичер, Б. Джервис. – М.; СПб. ; Киев, 2004.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТИПА SIGN

А.В. Селезнев, И.А. Сидорова, Р.Г. Тер-Аракелян

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В современных технических устройствах широко используются динамические импульсные системы замкнутой структуры. Как правило, в контуре обратной связи этих систем находится нелинейный элемент, например, квантователь. Сложность расчёта подобных структур связана с отсутствием общей теории решения нелинейных разностных уравнений, поэтому для их расчёта используются, как правило, численные методы и частные математические модели. Одной из фундаментальных проблем расчёта подобных структур является решение задачи устойчивости.

В настоящей работе рассматривается вопрос расчёта устойчивости динамической импульсной системы, состоящей из последовательной цепочки интеграторов, охваченных импульсной обратной связью с нелинейностью типа sign, в режиме малого сигнала. Примерами таких систем могут быть системы автоматического управления инерционными объектами, движение которых описывается интегральными уравнениями, сигма-дельта модуля-

торы высоких порядков, которые используются при построении высокоточных интегрирующих АЦП.

Для описания состояния интеграторов динамической импульсной системы с нелинейностью типа sign можно воспользоваться графоаналитическим методом, описанным в работе [1]. В общем виде система уравнений, описывающая состояния интеграторов в дискретные моменты времени, приведена ниже:

$$\begin{cases} U_{1[n]} = U_{1[n-1]} + X_{[n-1]} - \lambda_1 U_{OC[n-1]} \\ U_{2[n]} = U_{2[n-1]} + U_{1[n-1]} - \lambda_2 U_{OC[n-1]} - \frac{1^2}{2!} \lambda_1 U_{OC[n-1]} + \frac{1^2}{2!} X_{[n-1]} \\ \vdots \\ U_{k[n]} = U_{k[n-1]} + U_{k-1[n-1]} + \frac{1^2}{2!} U_{k-2[n-1]} + \dots + \frac{1^{k-1}}{(k-1)!} U_{1[n-1]} - \lambda_k U_{OC[n-1]} \\ - \frac{1^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_{k-1} U_{OC[n-1]} - \dots - \lambda_1 \frac{1^k}{k!} U_{OC[n-1]} + \frac{1^k}{k!} X_{[n-1]}, \end{cases} \quad (1)$$

где λ – коэффициенты обратной связи; U – состояние интеграторов в дискретные моменты времени $t = nh$, где h – шаг дискретизации, n – номер цикла преобразования. Величина обратной связи формируется как знаковая функция в зависимости от состояния последнего k -го интегратора:

$$U_{OC[n-1]} = U_0 \cdot \text{sign}(U_{k[n-1]}).$$

Было установлено, что при нулевом входном воздействии система находится в устойчивом автоколебательном состоянии с периодом 2^k . При этом знаки сигнала ОС чередуются согласно знакам полинома вида:

$$(1-x) \cdot (1-x^2) \cdot \dots \cdot (1-x^{2^{k-1}}).$$

Коэффициенты λ выбираются из условия, что в течение периода колебаний знак состояния k -го интегратора будет соответствовать соответствующему знаку данного полинома. Это позволяет составить систему неравенств, решением которой является область допустимых значений коэффициентов λ , соответствующих устойчивому режиму динамической системы для нулевых входных воздействий. Значения коэффициентов λ , соответствующих устойчивой динамике переходных процессов для заданных тестовых входных сигналов, можно найти численными методами из

области допустимых значений, что существенно уменьшает объём вычислений.

В качестве примера ниже приведены результаты расчёта коэффициентов λ_1 и λ_2 сигма-дельта модулятора 3-го порядка при условии, что $\lambda_3 = 1$.

λ_1	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2
0,01	X									X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,03	X								X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,05	X							X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,07	X	X					X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,1	X	X	X			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,12	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,14	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,16	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,18	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,21	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,23	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,25	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,28	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,30	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,32	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,34	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,37	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,39	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,41	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,43	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
0,46	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Область значений λ , соответствующих устойчивому режиму динамической системы, описывается неравенствами $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$,

$11\lambda_1 + 3\lambda_2 - 6\lambda_3 < 0$ и на рисунке ограничена двумя прямыми. Крестиками обозначены точки, соответствующие неустойчивому состоянию системы. Входной сигнал лежит в диапазоне $\pm 0,5U_{OC}$.

Область значений коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, соответствующих устойчивой динамике переходных процессов для тестового сигнала, совпадает с подмножеством значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, полученных из системы неравенств.

Библиографический список

1. Чувькин Б.В., Селезнев А.В., Тер-Аракелян Р.Г. Графоаналитический метод моделирования сигма-дельта преобразователей информации замкнутой структуры // Перспективные информационные технологии для авиации и космоса (ПИТ-2010): Труды Международной конференции с элементами научной школы для молодежи. – Самара, 2010. – С. 60 – 63.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕТОК С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРА ЗАМЫКАНИЯ

В.Б. Лебедев, Е.В. Паршина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Роль современных информационных технологий как средства хранения, обработки и доступа к большим объемам информации постоянно возрастает. Проблемы анализа большого количества данных, быстрого поиска и классификации необходимой информации влечет за собой потребности в автоматизации обработки данных с помощью ЭВМ.

Для решения сложных задач и повышения качества анализа и классификации информационных ресурсов в настоящее время все больше применяют дискретные методы, к которым относят методы комбинаторно-упорядоченного моделирования. (КУМ)

В настоящей работе рассмотрен алгоритм дискретной классификации, использующий методы КУМ и основанный на построении и анализе решеток данных с помощью оператора замыкания.

В основе методов КУМ лежит понятие решетки (дискретной структуры), которая является разновидностью частично упорядоченного множества [1].

Решетка L_ψ в методе КУМ строится с использованием оператора замыкания $\hat{A} = \bigcap_{R \in \{R\}} R_A$, заданного на порождающем множестве $\{R\}$,

которое представляет исходное семейство данных [1]. Здесь $\hat{A}$ — замыкание множества $A \subseteq \bigcup_{R \in \{R\}} R = P$; R_A — множество семейства $\{R\}$, которое содержит A в качестве подмножества, т.е. $A \subseteq R_A$. Все замкнутые подмножества $A = \hat{A}$ образуют полную решетку L_ψ , упорядоченную включением.

Диаграмма Хассе решетки L_ψ представляет собой визуализацию структуры данных, что позволяет более точно структурировать классифицируемую информацию и делать ее общий анализ.

Программная реализация алгоритма построения решётки заключается в последовательном построении таблиц в оперативной памяти ЭВМ.

Начальным этапом выполнения алгоритма является построение таблицы $T^{(0)}$, содержащей одну строку и $m^{(0)} = m$ столбцов, и записать в нее обозначения всех порождающих множеств семейства $\{R\}$ [1].

Затем определяют структурные нуль (0) и единицу(1) решётки L_ψ по формулам:

$$0 = \overline{\emptyset} = \bigcap_{R \in \{R\}} R_\emptyset, 1 = P = \bigcup_{R \in \{R\}} R$$

и считают, что они принадлежат таблице $T^{(0)}$ [1].

Далее составляют таблицу $T^{(1)}$. Для этого выделяют образующие элементы текущей таблицы $T^{(1)}$ из множества собственных элементов предшествующей таблицы $T^{(0)}$, а затем определяют множество собственных элементов таблицы $T^{(1)}$ как комбинаторные попарные пересечения её образующих элементов. (Образующими элементами таблицы здесь

называются элементы, принадлежащие её крайним верхней и левой графам, остальные элементы называются собственными) [1].

Затем строится последовательность таблиц $T^{(l)}$, $l=2,3,\dots,h$ до тех пор, пока в очередной таблице есть существенные элементы.

Заключительным этапом является построение диаграммы Хассе решётки L_ψ . В решетку L_ψ входят все множества, являющиеся элементами построенных таблиц $T^{(l)}$, $l=0,1,\dots,h$ [1].

Рассмотренный алгоритм построения решетки реализован на объектно-ориентированном языке Delphi версии 7. Выбор языка программирования обусловлен тем, что он оптимально подходит для решения поставленной задачи.

Основным элементом, используемым в программе, для реализации данного алгоритма является компонент ClientDataSet. Компонент позволяет обрабатывать в оперативной памяти двумерные динамические наборы данных, представляющие собой таблицы с возможностью групповых операций с элементами этих таблиц, индексирования и фильтрации. Обработка данных ведется с использованием нескольких динамических наборов данных в циклах. Алгоритм вычисления можно было бы значительно упростить, применяя клиент-серверную архитектуру, с использованием языка SQL. Так как этот вариант реализации связан с необходимостью наличия серверной части (СУБД), то это значительно ограничивает возможности эксплуатации программы на отдельных ПК. Поэтому программа реализуется без использования СУБД.

Анализ и результаты компьютерного моделирования алгоритма построения решётки L_ψ с помощью оператора замыкания
$$A = \bigcap_{R_A \in \{R\}} R_A$$

показывают, что трудоемкость построения решёток L_ψ определяется в основном не количеством таблиц Q_T , число которых относительно невелико, а количеством элементов таблиц Q_I , которое имеет экспоненциальный характер роста. Однако для многих реальных задач фактическое число таблиц и количество элементов в них значительно меньше, чем дают формулы оценок Q_T и Q_I . Это объясняется только наличием большого числа несущественных элементов в таблицах [1].

Библиографический список

1. Лебедев В.Б. Анализ ассоциаций данных методом комбинаторно-упорядоченного моделирования // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2005. – №5 (20). – С. 99 – 106.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Э.К. Самерханова, Е.В. Мочалова

Волжский государственный инженерно-педагогический университет,
г. Нижний Новгород, Россия

Стремительное развитие и распространение современных информационных технологий открывают новые возможности для организации информационно-образовательного пространства обучения студентов в вузе.

Появление специализированных программных продуктов, направленных на решение большого спектра прикладных задач, позволяет реализовать новый подход к организации взаимодействия пользователя и компьютера, не требующий обязательного присутствия системного аналитика или программиста.

В процессе решения различных прикладных задач наиболее эффективным является использование вычислительных систем как программных средств, наиболее интегрированных с математикой.

Среди известных компьютерных математических систем, используемых в решении прикладных задач, необходимо выделить MathCad, MatLab, Matematica, Maple, Derive. Однако наибольшей популярностью в решении прикладных задач пользуется математическая система MathCad. Это связано с простотой интерфейса и простотой технологии решения математических задач.

Изучая курс математики, а также занимаясь моделированием социально-экономических процессов, студентам зачастую приходится обращаться к методу линейного программирования, цель которого заключается в максимизации или минимизации некоторого количества средств (денег, сырья, оборудования, продукты питания и т. д.), которое математически выражается в виде линейной формы некоторого числа переменных. Отыс-

квиваемые при этом неизвестные переменные обеспечивают экстремум целевой функции.

В качестве примера рассмотрим решение задачи методом линейного программирования с использованием MathCad.

Задача. Лаборатория Гидромета занимается проведением анализа проб воздуха санитарно-защитных зон и воздуха производственных помещений. Два промышленных предприятия сделали заказ на проведение данных анализов. Лаборатория может сделать не более 10 анализов в сутки по санитарно-защитным зонам и не более 8 по воздуху производственных помещений. Какое количество проб может проанализировать лаборатория от первого и второго предприятия? Какую прибыль получит лаборатория, если первое предприятие заплатит 15 тыс. рублей, второе – 13 тыс. рублей?

Математическая модель задачи

Задание переменных: X_1 , X_2 – пробы воздуха соответственно первого и второго предприятия.

Система ограничений:

$$\begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \leq 10 \\ 2X_1 + 7X_2 \leq 8 \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F(x) = 15x_1 + 13x_2 \text{ (max)}$$

Рассмотрим решение задачи в среде MathCad.

Записывая математические формулы в рабочем документе MathCad, мы сразу можем получить ответ. Если необходимо выполнить алгебраические преобразования или действия математического анализа над заданным выражением, то MathCad сделает это с помощью соответствующих текстовых комментариев. В выкладках при поиске числового результата наряду с общеупотребительными математическими операциями и функциями может быть использовано большое количество встроенных функций численного анализа MathCad.

Автоматизация математических расчётов даёт возможность сосредоточиться на экономической и экологической целесообразности данного решения.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = c \cdot x \quad \text{Given} \quad A \cdot x \leq b \quad x \geq 0$$

$$y = \text{Maximize}(F, x) \quad y = \begin{pmatrix} 1.586 \\ 0.69 \end{pmatrix} \quad F(y) = 32.759 \quad A \cdot y = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Выводы: лаборатория Гидромета при анализе проб воздуха санитарно-защитных зон и воздуха производственных помещений получит прибыль в размере 51 тыс. рублей, причём на первом предприятии лаборатория произведёт 2 пробы воздуха, а на втором – 1 пробу.

В целом использование вычислительных систем в решении различного рода прикладных математических задач позволяет оптимизировать временные затраты, разнообразить круг исследовательских задач, а также обучать студентов с позиции системного и комплексного подхода.

Библиографический список

1. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБУЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО КОЛОРИМЕТРА НА ОБРАЗЦОВЫХ МЕРАХ ЦВЕТА

М.Н. Морозова, В.А. Соловьев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В основе обучаемого интегрального колориметра лежат новые принципы измерения координат цвета X,Y,Z на основе многоэлементного фотоприемника и обучаемой структуры колориметра, позволяющей учитывать изменение спектральных характеристик источника излучения и фотоприемников в процессе производства и эксплуатации.

Под обучением интегрального колориметра будем понимать алгоритм, при котором на основе измерения координат цвета образцовых мер определяются значения синаптических коэффициентов, обеспечивающих допустимое значение погрешности измерения цвета. Обучение проводится в соответствии со следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^n (w_{ix} f_{ixj}) - x_j \right]^2 \rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^n (w_{iy} f_{iyj}) - y_j \right]^2 \rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^n (w_{iz} f_{izj}) - z_j \right]^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (1)$$

где w_{ix}, w_{iy}, w_{iz} – коэффициенты передачи каналов X,Y,Z i-го фотоприемника; $f_{ixj}, f_{iyj}, f_{izj}$ – сигнал с i-го фотоприемника, когда установлен j-й образец; x_j, y_j, z_j – эталонное значение координаты цвета X, Y, Z j-го образца; n – число фотоприемников; m – число образцов для обучения.

Обучение колориметра проводилось на модели, разработанной в оболочке программного продукта Microsoft Excel. Ее работа основана на принципах работы нейронной сети. Структура связей обучаемого интегрального колориметра, основу нейронной сети которого составляют три нейрона 1, 2, 3, приведена на рис. 1.

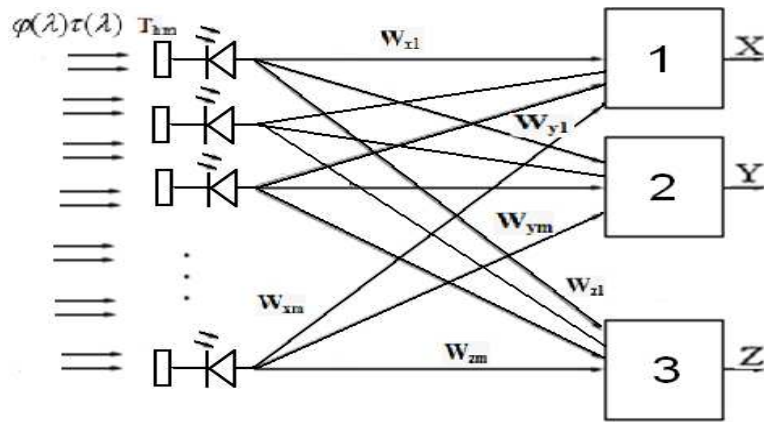


Рис. 1. Структура связей обучаемого интегрального колориметра

Излучение $\varphi(\lambda_i)\tau(\lambda_i)$, отраженное от исследуемого образца, проходит через корректирующий светофильтр и попадает на многоэлементный фотоприемник. С выходов фотоприемника сигналы поступают на сумматоры. Выходной сигнал сумматоров соответствует координатам цвета, вычисляемым согласно выражениям:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^m \omega_{xj} \left[\sum_{i=1}^n K_{xj} \varphi_p(\lambda_i) S_{xj}(\lambda_i) T_{xj}(\lambda_i) \Delta\lambda \right]; \\ Y &= \sum_{j=1}^m \omega_{yj} \left[\sum_{i=1}^n K_{yj} \varphi_p(\lambda_i) S_{yj}(\lambda_i) T_{yj}(\lambda_i) \Delta\lambda \right]; \\ Z &= \sum_{j=1}^m \omega_{zj} \left[\sum_{i=1}^n K_{zj} \varphi_p(\lambda_i) S_{zj}(\lambda_i) T_{zj}(\lambda_i) \Delta\lambda \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где K_x, K_y, K_z – коэффициенты передачи по каналам измерения X, Y, Z ; $\varphi_p(\lambda_i)$ – относительное спектральное распределение потока излучения реального источника установленного в приборе; $S_x(\lambda), S_y(\lambda), S_z(\lambda)$ – относительная спектральная чувствительность фотоприемников по соответствующим каналам измерения; $T_x(\lambda), T_y(\lambda), T_z(\lambda)$ – спектральный коэффициент пропускания корректирующих фильтров по соответствующим каналам измерения; $\tau(\lambda)$ – спектральный коэффициент пропускания или отражения измеряемого образца, j -номер фотоприемника; m – число

фотоприемников; n – число длин волн, по которым ведется суммирование;
 ω_{xj} ω_{yj} ω_{zj} – синаптические коэффициенты.

Оптимальные конструктивные параметры модели интегрального колориметра определяют из условия минимума целевых функций:

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m K_{xj} \varphi_p(\lambda_i) S_x(\lambda_i) T_{xj}(\lambda_i) \omega_{xj} - \varphi(\lambda_i) \bar{x}(\lambda_i) \right]^2 \rightarrow \min;$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m K_{yj} \varphi_p(\lambda_i) S_y(\lambda_i) T_{yj}(\lambda_i) \omega_{yj} - \varphi(\lambda_i) \bar{y}(\lambda_i) \right]^2 \rightarrow \min; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m K_{zj} \varphi_p(\lambda_i) S_z(\lambda_i) T_{zj}(\lambda_i) \omega_{zj} - \varphi(\lambda_i) \bar{z}(\lambda_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

При моделировании были определены типы цветных стекол и их толщины. При обучении, проводимом согласно выражениям (1), оставались неизменными, мы варьировали лишь синаптическими коэффициентами. Для обучения использовались стандартные виртуальные образцовые меры цвета, а в качестве источника излучения использовался стандартный источник А. Синаптические коэффициенты, полученные при обучении на виртуальных образцовых мерах, приведены в таблице.

Значения синаптических коэффициентов для стандартного источника А

Тип стандартного источника излучения	Канал измерения	Синаптические коэффициенты									
		ф-к1	ф-к2	ф-к3	ф-к4	ф-к5	ф-к6	ф-к7	ф-к8	ф-к9	ф-к10
А	X _{малое}	-0,324	-0,020	0,727	-0,105	0,617	-0,161	-0,935	0,175	-0,651	0,370
	X _{большое}	0,253	0,169	0,034	0,076	-0,253	-0,370	0,095	0,145	-0,233	-0,123
	Y	-0,286	0,259	0,218	-0,193	0,047	0,265	-0,234	0,230	-1,413	0,158
	Z	0,698	0,369	0,525	0,704	0,937	0,775	0,741	0,994	1,006	1,203

Расчеты проводились также для стандартных источников излучения В, С, D65. При этом конструктивные параметры корректирующих фильтров оставались неизменными для каждого стандартного источника излучения, а находились оптимальные значения синаптических коэффициентов, которые удовлетворяли условию минимума целевых функций.

На графиках представлены результаты расчетов воспроизведенных относительных спектральных чувствительностей измерительных каналов X, Y, Z, соответствующих источнику А (рис. 2). Для сравнения приведено произведение функции сложения цветов стандартного наблюдателя на относительное спектральное распределение потока излучения стандартного источника А.

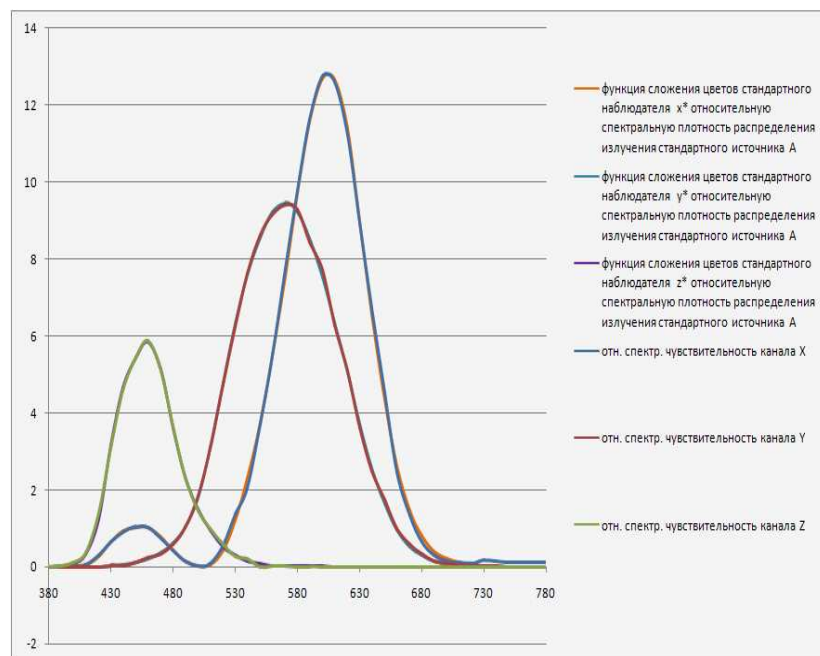


Рис. 2. Графики воспроизведенных относительных спектральных чувствительностей измерительных каналов X, Y, Z, соответствующих источнику А

При моделировании колориметра абсолютная погрешность измерений координат цвета составила 0,15 для координаты цвета X; 0,12 – для координаты цвета Y; и 0,13 – для координаты цвета Z. Получить такую же точность

воспроизведения относительной спектральной чувствительности измерительных каналов X, Y, Z на одиночных фотоприемниках не удалось.

Библиографический список

1. Соловьев В.А. Измерение относительной спектральной чувствительности фотоэлектронных каналов колориметров интегрального типа // Измерительная техника. – 2005. – № 5.
2. Соловьев В.А. Математическая модель колориметра интегрального типа, работающего в режиме компарирования // Метрология. – 2004. – № 1.
3. Джадд Д., Вышецки Г. Цвет в науке и технике. – М.: Мир, 1978.
4. Соловьев В. А., Морозова М. Н. Нейроколориметр // Сборник трудов международной конф. «Прикладная оптика-2010». – Санкт-Петербург, 2010. – С. 275 – 281.

ЭВОЛЮЦИЯ УГЛА ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПРОЦЕССАХ КОНЕЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРУГОВЫХ ОБОЛОЧЕК

А.В. Кудряшов

Тульский государственный университет,
г. Тула, Россия

Система уравнений, описывающая процесс квазистатического деформирования тонкой идеально пластической оболочки под действием следящей нагрузки p [4] может быть записана в виде:

$$\begin{cases} p \frac{\partial \gamma}{\partial r} \rho^3 + 2r(T_2 - 2T_1)(\sin \gamma)^2 = 0, & p \rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} = T_1 r \sin 2\gamma \\ \frac{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)} \left(tg\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s_o} + \frac{\partial}{\partial s_o} \left[\ln \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \right] \right) = \frac{\partial \ln(\rho/r)}{\partial s_o}. \end{cases} \quad (1)$$

Материал оболочки обладает идеально пластическими свойствами [1,3]:

$$T_1 = \tau_o h_o \frac{\sqrt{6}}{6} (3 \sin \varphi + \sqrt{3} \cos \varphi), \quad T_2 = \tau_o h_o \frac{\sqrt{6}}{6} (3 \sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi). \quad (2)$$

Здесь s_o – временноподобный параметр процесса деформирования – длина дуги траектории деформирования в полюсе оболочки; $\rho(r, s_o)$ –

текущая радиальная координата точки срединной поверхности оболочки; T_1, T_2 – растягивающие усилия соответственно в меридианальном и окружном направлении; $\gamma(r, s_o)$ – угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки; $\varphi(r, s_o)$ – угол вида напряженного состояния.

Система уравнений (1),(2) является замкнутой относительно функций $\gamma(s_o, r), \varphi(s_o, r), \rho(s_o, r)$. Построим ее решение для следующих граничных и начальных условий, соответствующих деформированию из плоского состояния и шарнирному опиранию на круговой границе:

$$\begin{aligned} \varphi|_{r=0} &= \frac{\pi}{2}, \quad \rho|_{r=R} = R, \quad \gamma|_{r=0} = 0; \\ \gamma(r)|_{s_o=0} &= 0, \quad \rho(r)|_{s_o=0} = r, \quad \varphi|_{s_o=0} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} r^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Развитие процесса во времени будем рассматривать дискретно, для этого производные по времени, входящие в уравнение (1), заменим правыми конечными разностями:

$$\left. \frac{\partial ()}{\partial s_o} \right|_{s_o = s_o^{[k]}} = \frac{()^{[k]} - ()^{[k-1]}}{s_o^{[k]} - s_o^{[k-1]}}, \quad (4)$$

где через $[k]$ обозначен номер шага по «времени». В результате дискретизации для каждого момента процесса формоизменения получена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций $\gamma^{[k]}(r), \varphi^{[k]}(r), \rho^{[k]}(r)$. На каждом шаге по времени будем искать асимптотическое в окрестности полюса решение задачи, для чего в первую очередь произведем в уравнениях системы (1) следующие замены:

$$\frac{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)} \approx \frac{19.92}{\pi^2} \varphi^2 - \frac{10.08}{\pi} \varphi + 1.22; \quad (5)$$

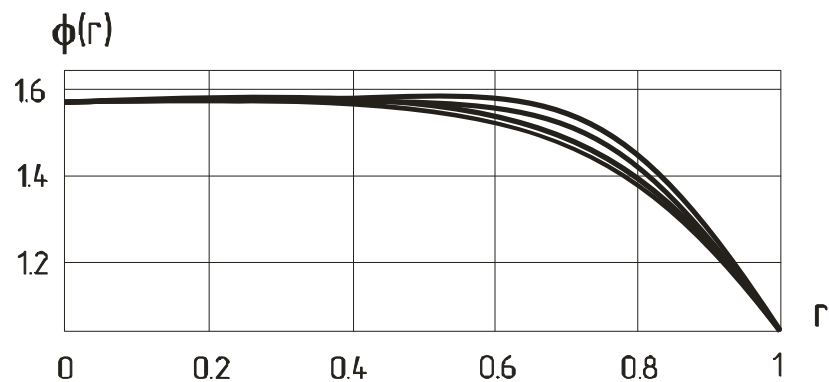
$$2T_1 - T_2 \approx \tau_o \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}\sqrt{3}}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{3\sqrt{6}(6 + \sqrt{3}\pi - 6\sqrt{3})}{\pi^2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right); \quad (6)$$

$$T_1 \approx \tau_o \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\sqrt{6}(18 + \sqrt{3}\pi - 12\sqrt{3})}{\pi^2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right). \quad (7)$$

Выполненные аппроксимации сохраняют асимптотическое поведение выражений в окрестности $\varphi = \pi/2$ и имеют относительную погрешность не более 3%. Выполняя подстановки (5) – (7) в систему уравнений (1), (2), получаем новую систему уравнений, эквивалентную исходной с некоторой степенью точности. Выполненная замена не приносит существенной погрешности в постановку задачи, но позволяет строить решение на каждом шаге в виде степенных рядов по начальной радиальной координате:

$$\begin{aligned} \gamma^{[k]}(r) &= \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i^{[k]} r^i, \quad \rho^{[k]}(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i^{[k]} r^i; \\ \varphi^{[k]}(r) &= \frac{\pi}{6} r^2 + (R^2 - r^2) \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{i=2}^N \Phi_i^{[k]} r^i \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Следует отметить, что выражение (8) для угла вида напряженного состояния выбрано таким образом, чтобы тождественно удовлетворять граничным условиям (3), а искомые коэффициенты $\Phi_i^{[k]}$ только уточняют его вид. Классическая процедура метода неопределенных коэффициентов [2] приводит к системе линейных алгебраических уравнений для определения искоемых коэффициентов разложений (8). Формирование и решение системы проводилось средствами среды аналитических вычислений Maple 9.0. Явные выражения найденных коэффициентов в статье не приведены ввиду их чрезвычайной громоздкости. Отметим лишь, что найденные коэффициенты зависят от $\Lambda_1^{[k]}$, величины $p/\tau_o h_o$, а также от решения на предыдущем по нагружению шаге. Коэффициенты $\Lambda_1^{[k]}$ задаются произвольно в виде монотонно возрастающей последовательности, которая определяет развитие деформаций полюса оболочки во времени. Для определения величины $p/\tau_o h_o$ на каждом шаге нагружения используется граничное условие $\rho|_{r=R} = R$ – в результате формируется последовательность значений внешней нагрузки, соответствующая заданной последовательности величин деформаций полюса. На рисунке показано изменение угла вида напряженного состояния на устойчивой стадии процесса деформирования в диапазоне $\Lambda_1 = 1 \dots 1, 2$.



*Изменение угла вида напряженного состояния
в процессе деформирования*

Из полученного решения следует, что в моделируемом эксперименте на устойчивой стадии процесса деформирования угол вида напряженного состояния изменяется незначительно (менее 6%). Существенно, что область оболочки $r < 0,6R$ в течение всего процесса деформирования находится в состоянии, близком к состоянию полной пластичности. Полученный результат может служить обоснованием для ряда гипотез, которые позволят построить аналитические решения задач конечного деформирования тонких идеально пластических и вязкопластических оболочек.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракт П1125).

Библиографический список

1. Ильющин А.А. Пластичность: Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
2. Ильющин А.А. Труды. Т.1 (1935 – 1945). – М.: Физматлит, 2003. – 352 с.
3. Маркин А.А. Термомеханика процессов упругопластического и сверхпластического деформирования металлов // ПМТФ. – 1999. – Т.40, №5. – С. 164 – 172.
4. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ НА ИЗЛУЧЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

Д.Н. Шишулин

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Микроволновые антенны, закрепленные на подвижных объектах, в процессе эксплуатации испытывают вибрационные воздействия, влияние которых обычно оценивается по результатам экспериментальных исследований, что требует значительных временных и вычислительных затрат. Поэтому оценка такого влияния с использованием математической модели представляет значительный интерес [1, 2].

Пусть зеркальная параболическая антенна закреплена вертикально с помощью недеформируемого дискового «держателя» в центре зеркала. В таком положении зеркала при вибрационных воздействиях основной формой колебания являются асимметричные колебания (рис.1), причем определяющее влияние на форму колебания зеркала оказывает конструкция держателя [2].

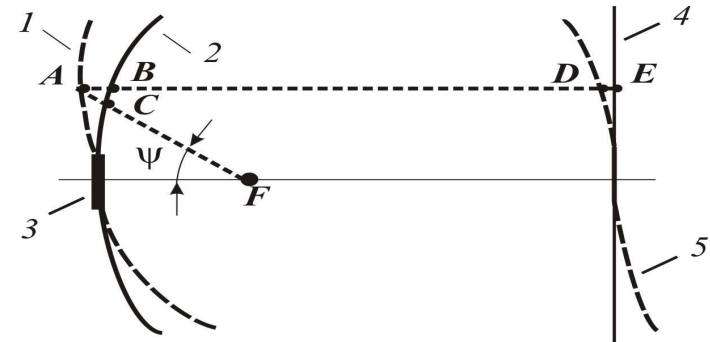


Рис.1. Деформация зеркала антенны при вибрационном воздействии:
1 – искаженный профиль зеркала; 2 – неискаженный профиль зеркала;
3 – держатель зеркала; 4 – плоский фронт волны; 5 – искаженный фронт
волны; F – фокус параболического зеркала; Ψ – направление парциального
луча электромагнитной волны; A, B, C, D, E – информативные точки,
характеризующие удлинение пути волны в верхней половине
и его укорочение в нижней половине зеркала (A, B и C),
а также искажение фронта волны (D и E)

Наиболее подходящим для рассмотрения непрерывной излучающей поверхности является дискретное представление в виде системы элементарных излучателей. Нахождение поля антенны, создаваемого системой элементарных излучателей, в точке наблюдения P сводится в результате к суммированию полей всех составляющих её источников с учетом амплитуд и фаз. В соответствии с этим напряженность электрического поля E_Σ , создаваемого такой антенной, примет вид [1, 3]:

$$E_\Sigma = \sum_{i=0}^n E_{\theta i}, \quad (1)$$

где i – номер излучателя; $E_{\theta i}$ – составляющая электрического поля, создаваемая элементарным излучателем с индексом i ; $n = 2N$ – четное число излучателей.

Составляющая электрического поля $E_{\theta i}$, создаваемая i -м излучателем в направлении точки наблюдения P может быть определена как

$$E_{\theta i} = E_{0i} \cdot F(\theta_i) \cdot \frac{e^{-jk(r_i + \Delta r_i)}}{r_i + \Delta r_i}, \quad (2)$$

где E_{0i} – амплитуда напряженности электрического поля i -го излучателя у поверхности антенны; $F(\theta_i)$ – уровень ДН i -го излучателя в направлении θ_i ; θ_i – угол наблюдения точки P относительно нормали к i -тому элементарному излучателю в его центре; $j = \sqrt{-1}$ – мнимая

единица; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число электромагнитной волны; λ – дли-

на электромагнитной волны; r_i — расстояние от центра i -го излучателя до точки наблюдения P ; Δr_i — изменение пути парциального луча электромагнитной волны i -тому элементарному излучателю вследствие деформации зеркала, приводящее к фазовому сдвигу распределения поля в его апертуре.

В соответствии с рис. 1, эти деформации Δr_i могут быть найдены как сумма отрезков пути волны AC и AB , причем можно считать, что $AC = AB \cdot \cos \psi$, где ψ – угол наблюдения точки A из фокуса зеркала [2]. Таким образом, по отклонению информативной точки B неискаженного зеркала в положение A на искаженном зеркале (см. рис. 1) получим:

$$\Delta r_i = AB \cdot (1 + \cos \psi). \quad (3)$$

Амплитуда напряженности электрического поля i -го излучателя у поверхности антенны E_{0i} может быть определена по распределению поля $f(y)$ исходя из его положения y_i вдоль оси Oy . Само же распределение поля $f(y)$ находится по ДН облучателя.

В качестве излучателей могут быть выбраны элементарные источники электромагнитных волн, например, такие, как вибратор Герца, симметричный полуволновый вибратор и др. В исследуемой модели считаем излучатели идентичными, пренебрегаем их взаимным влиянием и полагаем распределение токов неизменными во времени. Диаграмма направленности антенны в вертикальной плоскости $F(\theta)$ может быть определена как

$$F(\theta) = E_{\Sigma}(\theta) / E_{\max}, \quad (4)$$

где $E_{\max} = E_{\Sigma}(0)$ — максимальный уровень напряженности электрического поля, равный для симметричных антенн его значению в направлении оси симметрии.

Расчеты проводились при $\lambda = 0,02$ м и $\lambda = 0,03$ м, $R = 1000$ м для зеркальной параболической антенны диаметром 0,71 м, закрепленной вертикально с помощью дискового «держателя» в центре зеркала, результаты экспериментальных исследований которой опубликованы в [2]. Данные характеризуют изменение диаграммы направленности зеркальной параболической антенны при колебании для амплитуд 1...3 мм (рис. 2 а), для амплитуд 10...13 мм (рис.2 б) на частоте 48 Гц. Результаты расчетов приведены на рис. 2.

Исходная ДН антенны до деформации, рассчитанная с использованием рассмотренного дискретного представления, имеет вид, показанный на рис.2 (кривая 1).

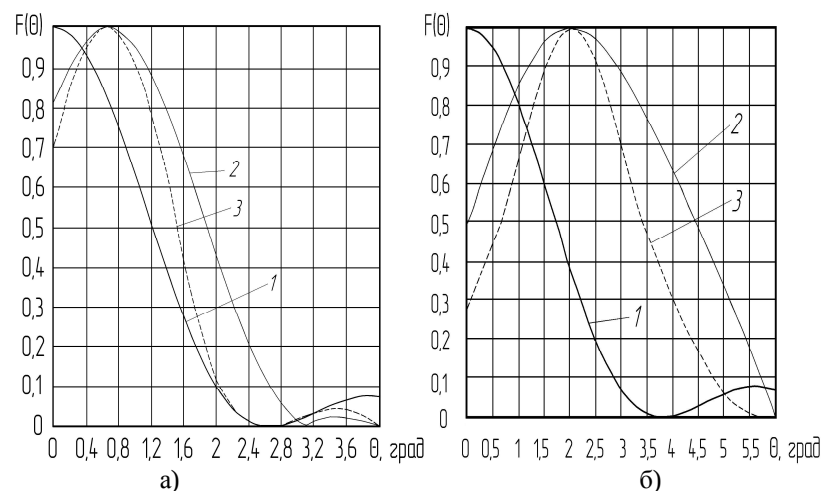


Рис. 2. Изменение ДН антенны вследствие деформации

После деформации зеркала происходит смещение максимума ДН, рассчитанной по предложенной методике (рис. 2, кривая 2), причем величина смещения расчетной кривой подтверждается результатом эксперимента (рис. 2, кривая 3), при небольшом расширении главного лепестка расчетной ДН.

Таким образом, полученные результаты подтверждают правильность построенной математической модели и предложенной методики расчета и могут использоваться при проектировании виброустойчивых зеркальных антенн.

Библиографический список

1. Якимов А. Н. Проектирование микроволновых антенн с учетом внешних воздействий: монография. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2004. – 206 с.
2. Абжирко Н.Н. Влияние вибраций на характеристики радиолокационных антенн. –М.: Сов. радио, 1974. – 168 с.
3. Талибов Н.А. Оценка влияния деформации волноводно-щелевой антенны на ее диаграмму направленности / Н.А.Талибов, А.Н. Якимов // Надежность и качество: сб. тр. междунар. симп. – Т. 2. – Пенза: Инф.-изд. центр ПГУ, 2008. – С. 146 – 148.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

А.Н. Грекова

Южно-Российский государственный технический университет
(Новочеркасский политехнический институт)
г. Новочеркасск, Россия

При анализе электромагнитных полей в современном электротехническом и электроэнергетическом оборудовании во многих случаях необходимо по данным измерений характеристик поля определить параметры сред и распределение полей в электрооборудовании.

В настоящей работе рассматривается задача определения намагниченности однородно намагниченного постоянного магнита в составе электрической машины по измеренному в доступном месте значению магнитной индукции.

В основе описанного ниже универсального алгоритма решения указанной задачи лежит натурно-модельный метод, суть которого рассмотрена в [1].

В качестве примера рассмотрим тестовую задачу, имеющую аналитическое решение (рисунок).

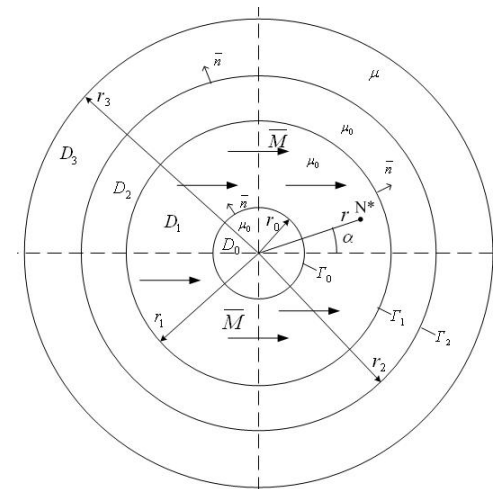


Рис.1. Сечение беспазовой двухполюсной обесточенной электрической машины с постоянными магнитами

На рисунке обозначены:

D_0 – область с $\mu=\mu_0$ (немагнитный вал); D_1 – область, занятая постоянным магнитом; D_2 – область воздушного зазора ($\mu=\mu_0$); D_3 – статор электрической машины; $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ – границы областей; $\vec{n}$ – нормали к границам.

Магнитостатическое поле электрической машины в режиме полного тока описывается уравнением

$$\operatorname{div} \mu_i \operatorname{grad} \phi_i = 0 \quad i = 0, 1, 2, \quad (1)$$

где μ_i – магнитная проницаемость среды в области D_i ; ϕ_i – скалярный магнитный потенциал в области D_i .

На границах раздела сред имеем следующие условия:

$$\phi_i(N) = \phi_{i+1}(N), \quad i = 0, 1, \quad (2)$$

$$\mu_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n}(N) = \mu_{i+1} \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial n}(N) - (-1)^{i+1} M_{ni}, \quad i = 0, 1, \quad (3)$$

где $\phi_i(N)$ – скалярный магнитный потенциал на границе Γ_i ; M_{ni} – значение нормальной составляющей намагниченности магнита на границе Γ_i .

Магнитное поле считаем плоскопараллельным; статор ненасыщен ($\mu = \infty$, $\phi_2 = 0$ на Γ_2); в области D_1 $\mu_1 = \mu_0$.

Пусть значение намагниченности в области D_1 неизвестно. Известно значение магнитной индукции $B(N^*)$ в некоторой фиксированной точке N^* и распределение $\vec{M}$ в постоянном магните. Требуется решить следующую обратную задачу: найти модуль намагниченности M и распределение магнитной индукции в электрической машине с постоянными магнитами, имея дополнительную информацию $B(N^*)=B^*$, где B^* определено с погрешностью ΔB , а также оценить устойчивость алгоритма задачи.

Сведем решение обратной задачи к последовательности решения прямых задач методом граничных элементов (МГЭ) [2].

Выберем начальное приближение $M^{(0)}$. Шаг изменения намагниченности – ΔM . Далее следуем алгоритму при $i=0 \dots n$ [2].

Шаг 1. Решаем прямую задачу (2)-(3) с $M=M^{(i)}$ и определяем распределение $B^{(i)}(N)$.

Шаг 2. Проверяем выполнение критерия останова:

$$|B^{(i)}(N^*) - B^*| \leq \alpha \cdot B^*. \quad (4)$$

Если (4) выполняется, то $B^{(i)}(N^*)$ и $M=M^{(i)}$ и будут решением обратной задачи. Если (4) не выполняется, то переходим к следующему этапу.

Шаг 3. Положим $M^{(i+1)} = M^{(i)} + \Delta M$ и, решая прямую (2)-(3), находим $B^{(i+1)}$.

Проверяем условие (4) и повторяем процедуру.

Численное решение получено при следующих значениях параметров:

$$r_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad r_1 = 7.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad r_2 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$M^{(0)} = 996000 \text{ А/м}$, $\Delta M = 500 \text{ А/м}$, $\alpha = 10^{-4}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, значение магнитной индукции B^* в точке $N_*(r, \alpha) = N_*(5.25 \cdot 10^{-3}, 4.5^\circ \text{C})$ равно 0.1714 Тл.

Полученное значение $M^{(8)} = 10^6 \text{ А/м}$ в области D_1 совпадает с точным решением тестовой задачи.

Для оценки устойчивости задачи к погрешности определения B было вычислено относительное число обусловленности

$$J_{\text{отн}} = \frac{\delta(M)}{\delta(B^*)} \approx 1. \text{ Полученный результат показывает, что относительная}$$

погрешность определения намагниченности постоянного магнита не превышает 1% при $\delta(B^*) = 1\%$.

Библиографический список

1. Гречихин В.В., Грекова А.Н. Определение параметров математических моделей потенциальных полей натурно-модельным методом // Изв. вузов. Электромеханика. – 2011. – №1. – С. 18 – 21.
2. Бахвалов Ю.А., Грекова А.Н., Янов В.П. Расчёт и оптимизация магнитных систем электрических машин с постоянными магнитами методами граничных и конечных элементов // Вестник ВЭЛНИИ: науч. изд. / ОАО «Всерос. науч.-ислед. и проектно-конструкт. ин-т электро-возрождения» (ОАО «ВЭЛНИИ»). – Новочеркасск, 2007. – № 1(53). – С. 49 – 57.

ФОРМЫ ПРИНЦИПА ИЗМЕНЧИВОСТИ

Г. С. Садовой

Новосибирский государственный технический университет,
г. Новосибирск, Россия

Подводя итоги развитию физики XX века, Дж. Уилер (J.A. Wheeler) пришёл к выводу о том, что поиски всеобъемлющего подхода к исследованию реальности продолжаются и что «изменчивость есть закон природы» [1, с. 542]. Изменчивость в физике, растительной и животной природе требует «более внимательного рассмотрения» [1, с. 536-537].

В трудах В. И. Вернадского можно найти утверждение, касающееся методологии естествознания. Он полагал, что основу научного исследования составляет сбор большого количества экспериментальных и наблюдательных данных, затем следует их обобщение, и только после этого создаются теории. Научные положения и аксиомы вырабатываются очень медленно. Проходят поколения, прежде чем новые открытия, эмпирические обобщения, новые гипотезы заставляют учёных сознательно отнестись к этим основным положениям. Новые принципы появляются редко, обычная работа состоит в установлении научных фактов. Методология естествознания должна быть создана так же, как создаётся и само современное естествознание, т.е. эмпирическим путём, исходя из частных случаев. Математика в своих исходных положениях также основана на эмпирической базе. Если следовать этой идее, то необходимо по мере развития науки делать анализ и эмпирические обобщения новых научных фактов с тем, чтобы на их основе получать новые принципы.

Принцип изменчивости. Автором выполнен анализ наблюдаемых и экспериментальных фактов с единых позиций в рамках представлений В.И. Вернадского о методологии естествознания. Анализ выполнен начиная с работ Аристотеля и до публикаций сегодняшних дней. На основе анализа данных естествознания и техники автором разработан универсальный принцип (названный принципом изменчивости), использование которого позволяет целенаправленно ставить и решать новые задачи, создавать новые математические модели. Принцип изменчивости свойственен как живой, так и неживой природе. Ниже рассмотрены разные формы принципа изменчивости и некоторые его приложения.

В общем случае принципом изменчивости является утверждение [2, 3]: *для любого объекта можно выбрать такие, по меньшей мере, два множества значений пространственно-временных параметров, что они будут соответствовать двум разным свойствам системы.*

Предложены методы решения физических задач, основанные на применении принципа изменчивости [2 – 5]. Применение предложенного подхода позволяет вести исследования в различных областях естествознания и техники целенаправленно и планомерно. Естественно при этом ожидать обнаружения таких свойств исследуемого объекта, которые остаются незамеченными при использовании иных методов.

Принцип изменчивости в неевклидовых геометриях. Гипотеза о том, что изменение свойств пространства влечёт за собой изменение явлений механики, была высказана ещё Н.И. Лобачевским (1826). Он

подчёркивал необходимость «исследовать, какого рода перемена произойдёт от введения воображаемой геометрии в механику» [6, с. 261]. Неевклидову геометрию Лобачевский рассматривал как теорию пространственных отношений. Позже А.А. Фридман доказал, что нестационарные решения уравнений тяготения возможны как при положительной кривизне пространства (квадрат элемента длины определяется на сфере), так и при отрицательной кривизне (квадрат элемента длины в последнем случае определяется на псевдосфере Лобачевского).

Принцип изменчивости в астрономии формулируем так: *при изменении кривизны пространства изменяются пространственно-временные отношения и свойства систем.*

Принцип изменчивости не зависит от остальных известных принципов, он свойственен природе и применим к очень большому числу явлений.

Библиографический список

1. Уилер Дж. Квант и Вселенная // В кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности. – М.: Мир, 1982. – С. 535-558.
2. Садовой Г.С. Новый фундаментальный подход к построению математических моделей: Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 16-18 июня 2009 г.). Секция «Математическое моделирование»: тезисы докладов. – Available at <http://vm.cs.msu.su/samarski2009/abstracts/356.pdf>.
3. Садовой Г.С. Концепция систем с изменяющимися соотношениями // В кн.: Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / под ред. М. М. Лаврентьева. – Новосибирск: ИМ СОРАН, 2004. – С. 153-170.
4. Садовой Г.С. Метод решения некоторых задач о движении заряженных частиц в нестационарном электромагнитном поле // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: Международная конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 5-12 октября 2008 г.): тезисы докладов / Институт математики СО РАН. – Новосибирск, 2008. – С. 558.
5. Садовой Г.С. Моделирование систем с переменным запаздыванием: монография. – Новосибирск: НГТУ, 1994. – 274 с.; Реферат опубликован в РЖ «Физика», 1995. – № 12. – С. 1.
6. Лобачевский Н. И. О началах геометрии // В кн.: Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. Т. 1. – С. 185 – 261.

ГРАНИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В МОДЕЛИРОВАНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Ю.А. Парфёнова, А.А. Малышев

Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского,
г. Пенза, Россия

Ряд важных задач теории потенциала состоит в определении неизвестных граничных данных по другим известным данным: например, по условиям Неймана восстановить условие Дирихле. Будем обозначать соответствующую краевую задачу символами $i \rightarrow j$, где $i, j = 1, 2, 3$. Так, $2 \rightarrow 3$ – обозначение задачи определения граничного условия третьего рода по условиям второго рода.

Теорема 1. Для задачи 1-2 граничный оператор преобразования P имеет вид: $P : \tilde{f} \rightarrow f$,

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\varepsilon - 1) e^{-\varepsilon} \int_0^{2\pi} e^{\varepsilon \cos(\varphi - \psi)} (2 \cos \varepsilon \sin(\varphi - \psi) - 1) \tilde{f}(\psi) d\psi d\varepsilon. \quad (1)$$

Функция $\hat{f}$ предполагается такой, что сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(|a_k| + |b_k|) < \infty, \quad (2)$$

где $a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\psi) \cos k\psi d\psi$, $b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\psi) \sin k\psi d\psi$ – коэффициенты ряда Фурье.

Доказательство. Пусть $\tilde{u}(r, \varphi)$ – решение задачи Дирихле:

$$\Delta \tilde{u} = 0, \quad \tilde{u}|_s = \tilde{f}(\varphi).$$

По формуле, полученной в [1], имеем:

$$L_0[\tilde{u}](r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\varepsilon - 1) e^{-\varepsilon} \int_0^{2\pi} e^{\varepsilon r \cos(\varphi - \psi)} (2 \cos(\varepsilon \sin(\varphi - \psi)) - 1) \tilde{f}(\psi) d\psi d\varepsilon.$$

Выполним формальный предельный переход $r \rightarrow 1$:

$$\lim_{r \rightarrow 1} L_0[\tilde{u}] = f(\varphi),$$

тогда

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\varepsilon - 1) e^{-\varepsilon} \int_0^{2\pi} e^{\varepsilon \cos(\varphi - \psi)} (2 \cos(\varepsilon \sin(\varphi - \psi)) - 1) \tilde{f}(\psi) d\psi d\varepsilon.$$

Законность предельного перехода легко обосновывается требованием (2) и элементарно проверенным тождеством

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\varepsilon - 1) e^{-\varepsilon} \int_0^{2\pi} e^{\varepsilon r \cos(\varphi - \psi)} (2 \cos(\varepsilon \sin(\varphi - \psi)) - 1) \tilde{f}(\psi) d\psi d\varepsilon = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k \varepsilon^k r^k}{k!} \cos k\varphi + \frac{b_k \varepsilon^k r^k}{k!} \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Первая модельная задача. По значениям потенциала u на границе восстановить поток u'_n на границе. В качестве примера рассмотрим

потенциал $u = \frac{3}{4} r \sin \varphi - \frac{1}{4} r^3 \sin 3\varphi$. В этом случае поток легко вычис-

лить: $u'_n(r, \varphi)|_{r=1} = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{3}{4} \sin 3\varphi$.

Опишем регуляризационный алгоритм решения. По «зашумленным» значениям наблюдаемой функции

$$f(\varphi) = \left(\frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi \right) (1 + \delta\theta),$$

где $\delta = 10^{-4}$, θ – случайное число от -1 до 1, полученное с помощью генератора случайных чисел, находим коэффициенты ряда Фурье для функции $f(\varphi)$: f_{cn}, f_{sn} . Тогда расчетная формула примет вид:

$$u'_n(r, \varphi)|_{r=1} = \sum_{n=1}^{2N_0} f_{cn} \alpha_n n \cos n\varphi + f_{sn} \alpha_n n \sin n\varphi,$$

где $\alpha_n = \frac{\int_0^{N_0} e^{-x} x^n dx}{n!}$ – регуляризирующий множитель.

Вычисления ведутся в среде MatLab. На рис. 1 представлены графики наблюдаемой и расчетной зависимости от угла φ потенциала u'_n .

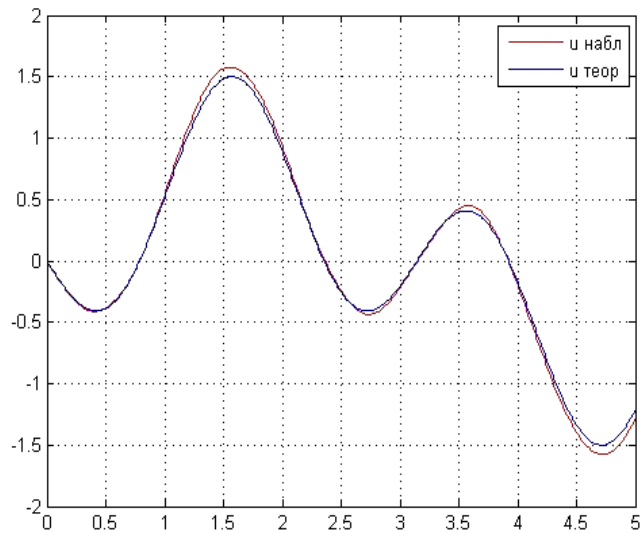


Рис. 1

Вторая модельная задача. По значениям потока

$u'_n = \frac{3}{4}r \sin \varphi - \frac{3}{4}r^3 \sin 3\varphi$ на границе восстановить потенциал u на границе.

С точностью до произвольной постоянной C точное решение имеет вид: $u(r, \varphi)|_{r=1} = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi$.

Опишем алгоритм. По «зашумленным» значениям наблюдаемой функции $f(\varphi) = \left(\frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{3}{4} \sin 3\varphi \right) (1 + \delta\theta)$ находим коэффициенты f_{cn}, f_{sn} и формулу для граничного значения потенциала

$$u(r, \varphi)|_{r=1} = \sum_{n=1}^{2N_0} f_{cn} \alpha_n \frac{1}{n} \cos n\varphi + f_{sn} \alpha_n \frac{1}{n} \sin n\varphi.$$

На рис. 2 представлены графики наблюдаемой и расчетной зависимости от угла φ потенциала u .

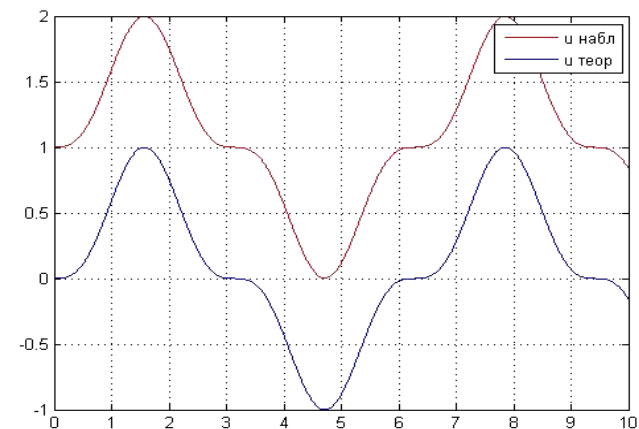


Рис. 2

Указанная картина подтверждает, что решение приведенной обратной задачи определяется однозначно с точностью до произвольной постоянной C .

Библиографический список

1. Яремко О.Э., Парфёнова Ю.А. Задача продолжения функции, гармонической в шаре // Вестник МГОУ. – 2010. – Вып. 3. – С. 3 – 9.

К ВОПРОСУ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛАНДШАФТНОГО ПОЖАРА НА ТЕРРИТОРИИ ВЗРЫВООПАСНЫХ ОБЪЕКТОВ ХРАНЕНИЯ

А.Н. Купцов, Ю.А. Држевецкий

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

За последние годы в нашей стране значительно увеличилось число пожаров на объектах хранения взрывоопасных элементов, что приводит к большим материальным потерям и даже гибели людей. Так, за последние пятнадцать лет ущерб государству от таких пожаров составил 11 млрд. рублей.

Для исследования сценария развития пожара на территории взрывоопасных объектов хранения составим математическую модель. В качестве допущения будем рассматривать слой горящих материалов одной категории и одного размерного класса, характеристики которого известны. Ос-

новой для вычисления скорости распространения пламени для установившегося процесса горения является уравнение сохранения энергии [1,2]:

$$V \rho_{be} Q = I, \quad (1)$$

где V – скорость распространения пламени; ρ_{be} – эффективная плотность горючего, т.е. количество горючего материала, участвующие в воспламенении; Q – теплота воспламенения; I – тепловой поток.

Важным допущением, принятым в рассматриваемой модели, является представление теплового потока I в виде [3]:

$$I = I_o (1 + \varphi_w + \varphi_s), \quad (2)$$

где I_o – тепловой поток, идущий на поддержание горения в горизонтальном слое горючего при отсутствии ветра; φ_w и φ_s – безразмерные коэффициенты, учитывающие увеличение потока при движении огня в направлении ветра и вверх по склону; эти величины определяются по эмпирическим зависимостям.

При отсутствии ветра и склона ($\varphi_w = \varphi_s = 0$) формула (1) примет вид:

$$V_o \rho_{be} Q = I_o \quad (3)$$

Рассмотрим все величины, необходимые для определения скорости V_o .

Теплота воспламенения определяется аналитически по известным физическим характеристикам целлюлозных горючих материалов:

$$Q = C_{pt} \cdot \Delta T_M + M (C_{p,ж} \cdot \Delta T_{ж} + Q_u), \quad (4)$$

где C_{pt} – теплоемкость сухой древесины; ΔT_M – перепад температур материалов (древесины) от начальной до температуры воспламенения; M – влагосодержание; $C_{p,ж}$ – теплоемкость воды; $\Delta T_{ж}$ – перепад температур жидкости (воды) от начальной до температуры кипения; Q_u – теплота испарения влаги.

Принимая $\Delta T_M = 320 - 20 = 300^\circ \text{C}$, $\Delta T_{ж} = 100 - 20 = 80^\circ \text{C}$ и учитывая известные величины теплоемкостей древесины и воды, а также скрытой теплоты испарения, получаем расчетную формулу

$$Q = 138,9 + 619,9M \text{ (ккал/кг)}. \quad (5)$$

Эффективная плотность горючего находится по зависимости

$$\rho_{be} = \rho \cdot \mathcal{E};$$

$$\mathcal{E} = \ell, \frac{452,75}{\sigma}, \quad (6)$$

где $\mathcal{E}$ – коэффициент эффективного нагрева; ρ – плотность горючего; σ – удельная поверхность.

Тепловой поток, идущий на поддержание горения, представляет собой часть потока энергии, выделяющейся при горении.

$$I_o = \xi \cdot I_R, \quad (7)$$

где I_R – количество тепла, выделяющееся с единицы площади горения в единицу времени, называемое интенсивностью реакции горения; ξ – безразмерный коэффициент.

Величины I_R, ξ определяются свойствами горючего материала.

Интенсивность реакции горения определяется скоростью выгорания горючего и его теплотворной способностью.

$$I_R = -\frac{d\omega}{dt} h, \quad (8)$$

где $d\omega/dt$ – скорость потери массы горючего на единицу площади горения; h – теплотворная способность.

Решая уравнение (8), получим:

$$I_R = \frac{h(\omega_n - \omega_k)}{\tau_R}, \quad (9)$$

где ω_n, ω_k – запас «чистого» (за вычетом минеральных веществ) горючего, соответственно начальный и остаточный (т.е. немедленно после прохождения пламени).

Таким образом, формула (3) для скорости распространения пламени при отсутствии ветра и склона имеет вид:

$$V_o = \frac{I_R \cdot \xi}{\rho \cdot \varepsilon \cdot Q} \quad (10)$$

Окончательная формула для скорости распространения фронта пламени по слою, содержащему горючее одной категории, имеет вид [4]:

$$V = \frac{I_R \cdot \xi \cdot (1 + \varphi_w + \varphi_s)}{\rho \cdot \varepsilon \cdot Q} = V_o \cdot (1 + \varphi_w + \varphi_s). \quad (11)$$

Составим уравнение движения контура пожара в каждый момент времени как линию на плоскости. Укажем вначале на связь уравнений движения контура с уравнением горения.

Если определить кромку пожара как нанесенную на карту изотерму, соответствующую температуре горения слоя, то для описания линии контура достаточно располагать уравнением теплового баланса для горючего [5,6,7].

$$\beta_M \rho_M C_M \left(\frac{\partial T_M}{\partial t} + V \cdot \text{grad} T_M \right) = \text{div} (\lambda_M (1 - \gamma) \text{grad} T_M), \quad (12)$$

где β_M – коэффициент заполнения горючего материала; ρ_M – плотность горящей массы; C_M – теплоемкость горящей массы; T_M – температура горения слоя; V – скорость контура горения; λ_M – теплопроводность твердого горючего.

Для пожаров, размер которых в плане много больше ширины зоны горения, величиной теплопроводности твердого горючего λ_M можно пренебречь, тогда уравнение (12) в соответствии с принятой в теории дифференциальных уравнений классификацией становится гиперболическим и, исходя из физического смысла задачи, должно рассматриваться при следующем начальном условии:

при $t = 0$

$$T_M(x, y, 0) = \begin{cases} T_p \\ T_0 \end{cases}, \quad (13)$$

где T_p – температура горения слоя при $x, y \in B_0$; T_0 – начальная температура горючего; B_0 – заданная область на плоскости Oxy , граница которой C представляет собой кромку пожара в начальный момент времени.

Кроме того, должны быть заданы все значения параметров, необходимых для вычисления вектора скорости распространения огня $V(x, y, t)$ для всех $x, y \in D, t \geq 0$. (Ниже всюду предполагается известной скорость движения контура в каждой его точке в любой момент времени. Эта величина считается определенной с помощью модели скорости распространения горения.)

Задача (12)-(13) является задачей Коши и при $\lambda_m = 0$ описывает движение линии скачка температуры горючего $T_i(x, y, t)$. Решение этой задачи определяется конусом характеристических нормалей уравнения (12), проходящим при $t=0$ через границу области B_o . Пусть $\varphi(x, y, t) = 0$ – уравнение контура в момент времени t . Тогда, как следует из теории уравнений в частных производных гиперболического типа, функция $\varphi(x, y, t)$ должна удовлетворять условию Гамильтона-Якоби для уравнения (12):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \cdot \text{grad} \varphi = 0. \quad (14)$$

Если в качестве скорости движения контура V рассматривать нормальную скорость, в каждой точке контура совпадающей по направлению с $\text{grad} \varphi$, то ее можно выразить следующим образом:

$$\bar{V}_n = \frac{\text{grad} \varphi}{|\text{grad} \varphi|} \cdot V_n, \quad (15)$$

где $\text{grad} \varphi / |\text{grad} \varphi|$ – единичный вектор нормали к кромке; $V_n = |\bar{V}_n|$ – величина нормальной скорости контура.

Подставив (15) в (14), получим уравнение, описывающее движение контура пожара:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{V}_n \cdot |\text{grad} \varphi| = 0. \quad (16)$$

Причем при $t=0$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_o(x, y), \quad (17)$$

где $\varphi_o(x, y) = 0$ – уравнение внешней границы области B_o .

Часто контур пожара удобно описывать в явном виде:

$$y = f(x, t). \quad (18)$$

В этом случае $\varphi(x, y, t) = f(x, t) - y = 0$, и из (16) следует

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \bar{V}_n \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 0. \quad (19)$$

Уравнение контура можно записать и в виде

$$\varphi(x, y, t) = y - f(x, t) = 0. \quad (20)$$

В этом случае в уравнении (20) второе слагаемое войдет с минусом. Знак этого слагаемого связан с направлением обхода контура. Уравнение (20) соответствует обходу контура по часовой стрелке.

Начальное условие к уравнению (20):

$$y(x, 0) = f(x, 0) = f_o(x), \quad (10)$$

причем $y = f_o(x)$ – уравнение линии $\varphi_o(x, y) = 0$, записанное в явном виде.

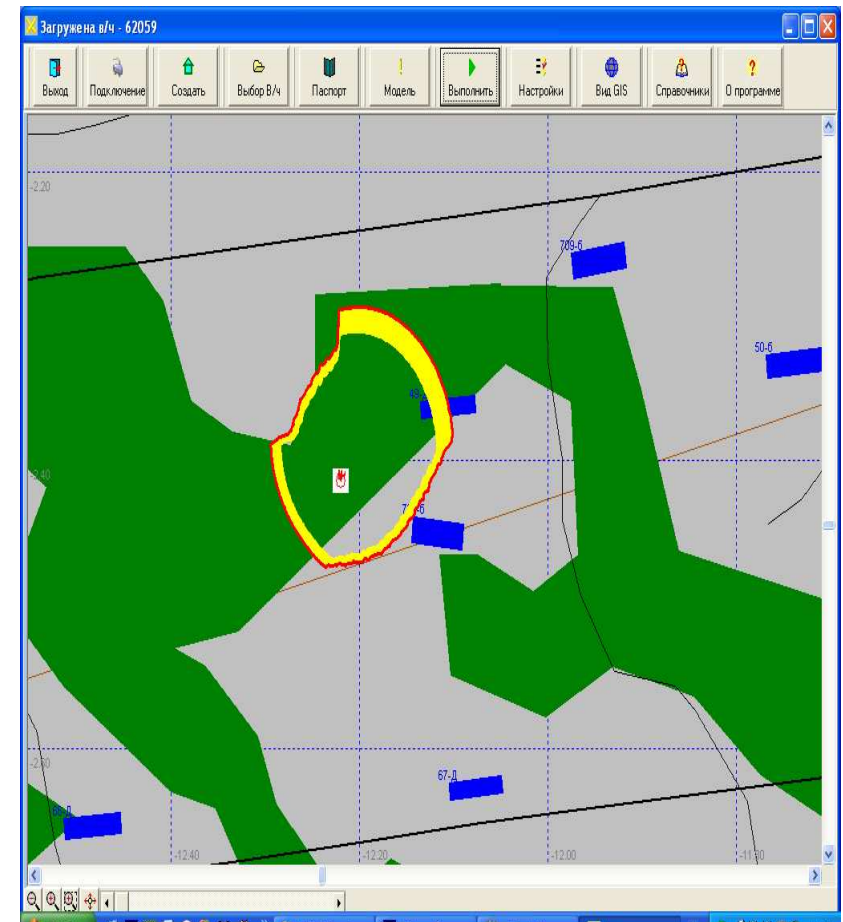
Вычислительная процедура построения контура основана на пошаговом счете положения точек контура на дискретной сетке, условно нанесенной на рассматриваемую территорию. Для ее осуществления были составлены алгоритм и программа. Результаты вычислений сравнивались с результатами тестового расчета по сертифицированной программе «Fire», предназначенной для расчета распространения огня в средах. Данные вычисления представлены в таблице.

Сравнение результатов работы модели и эталона

N шага	Время	Длина фронта		Площадь пожара	
		Модель	Fire	Модель	Fire
N-1	5	9.30393228630361	10.85459	6	7
N-2	10	18.6078645726072	21.36459	27	31
N-3	15	27.9117968589108	30.65722	61	67
N-4	20	37.2157291452145	38.90735	110	115
N-5	25	46.5196614315181	48.96806	171	180
N-6	30	55.8235937178217	57.40564	247	254
N-7	35	65.1275260041253	66.48435	336	343
N-8	40	74.4314582904289	75.6156	440	447
N-9	45	83.7353905767325	84.1872	556	559
N-10	50	93.0393228630362	94.12275	687	695
N-11	55	102.34325514934	103.3285	831	839
N-12	60	111.647187435643	112.6622	990	999
N-13	65	120.951119721947	121.3678	1161	1165
N-14	70	130.255052008251	131.3188	1347	1358
N-15	75	139.558984294554	140.1006	1546	1552

Как видно из таблицы, средняя ошибка в определении длины фронта пожара и его площади составила 4,2%, а максимальная – 16%, что вполне допустимо.

Для наглядности моделирования вычислений ландшафтного пожара предусматривалось графическое изображение на мониторе всех операций и построение изображения контура пожара в зависимости от времени. В качестве примера на рисунке показан полученный в результате вычислений внешний контур пожара через 75 с от начала возгорания.



*Отображение результатов моделирования
на картографической схеме монитора*

Таким образом, предложены математическая модель, алгоритм и программа, которые позволяют смоделировать ландшафтный пожар на территории взрывоопасных объектов хранения.

Библиографический список

1. Митропольский Ф.П. Авиационные средства поражения. – М.: Военное изд-во, 1995.
2. Вонский В.С. Интенсивность огня низовых пожаров и ее практическое значение. – Л.: ЛЕННИИЛХ, 1957.
3. Акимов В.А., Радаев Н.Н. Методический аппарат исследования природного и техногенного рисков // Безопасность жизнедеятельности. – 2001. – № 2.
4. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
5. Гостинцев Ю.А., Сухов Л.А. Аэродинамика среды при больших пожарах, линейный пожар. – Черноголовка: Академия наук СССР, 1977. – 51 с.
6. Курбатский Н.П. Современная теория распространения низовых лесных пожаров / Курбатский Н.П., Теплыгин Г.П. // В кн.: Современные исследования типологии и пирологии леса. – Архангельск, 1986. – 305 с.
7. Барановский Н.В. Основные принципы параллельной реализации общей математической модели лесного пожара // Пожарная безопасность. – 2008. – № 1.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ АНТЕННЫ
НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ
РАДИОЛУЧЕВОЙ СИСТЕМЫ**

М.С. Горбалысов

Федеральный научно-производственный центр
«Производственное объединение «Старт» им. М.В. Проценко»,
г. Заречный Пензенской обл., Россия

Одним из наиболее важных узлов радиотехнических систем с радиоканалом, к которым относятся и радиолучевая система обнаружения (РЛСО), является антенна. В процессе эксплуатации антенна подвергается неблагоприятным воздействиям. Вследствие деформации антенн в результате таких воздействий классические формулы, используемые обычно при расчете рассматриваемых антенн, оказываются неприменимыми. В связи с этим, актуальными становится исследование такого влияния на математических моделях и оценка этого влияния на характеристики системы обнаружения (СО) радиолучевого типа, а также разработка алгоритмов и мето-

дик, позволяющих оптимизировать конструкции антенн и выбрать их оптимальное пространственное размещение.

Большинство разработанных ранее моделей не учитывают работу системы в реальных условиях эксплуатации. Они не анализируют неблагоприятные воздействия среды на элементы системы или используют результаты, полученные для ряда аналогичных систем. Также эти модели не позволяют рассматривать систему как единое целое и оценить влияние моделируемых элементов на характеристики обнаружения системы.

К наиболее важным параметрам периметровых СО относят геометрические размеры ЗО, появление в которой объекта обнаружения вызывает возникновение полезного сигнала с уровнем, превышающим уровень шума или помехи. При этом средство обнаружения должно обеспечивать заданную вероятность обнаружения $P_{об}$ в этой зоне [1]. Другим важным параметром СО является вероятность ложной тревоги $P_{лт}$.

Рассмотрим параметры РЛСО, влияющие на характеристики обнаружения. Так как задача радиолокационного обнаружения является статистической, то необходимо знать распределение вероятности случайных величин шума и суммы сигнала и шума. Наиболее подходящим для решения этой задачи является распределение Рэлея, которое часто используется для описания огибающей случайного процесса, а обобщенный закон распределения Рэлея используется для описания огибающей суммы сигнала и шума с учетом изменения амплитуды в многолучевых каналах распространения [2].

Для моделирования влияния антенны на характеристики обнаружения РЛСО, устанавливающих связь между вероятностью правильного обнаружения и отношением сигнал/шум $q = S / N$ при заданной вероятности ложной тревоги, может быть использована приближенная формула, справедливая для вышеназванных законов распределения случайных величин сигналов, при значении вероятности обнаружения, превышающих 0,5 [2, с. 22]. Это позволяет аналитически найти вероятность правильного обнаружения по известному значению q и требуемому значению вероятности ложной тревоги.

Чтобы обеспечить заданные параметры вероятностей обнаружения и ложной тревоги, максимальная мощность шумов должна быть меньше в Q раз уровня принимаемой мощности, которая может быть рассчитана на основе уравнения для линии радиосвязи [3]:

$$P_2 = P_1 \cdot \frac{G_1 G_2 \lambda^2 F}{(4\pi)^2 R_H^2}, \quad (1)$$

где P_1 – мощность, излучаемая антенной передатчика; G_1, G_2 – коэффициенты усиления (КУ) передающей и приемной антенны соответственно; λ – длина волны излучения; R_H – расстояние между антеннами приемника и передатчика; F – интерференционный множитель, учитывающий отражение от подстилающей поверхности и потери на распространение сигнала. Таким образом, при изменении КУ приемных и передающих антенн меняется мощность принимаемого сигнала и изменяется соотношение сигнал/шум.

Так как КУ антенн связан с шириной луча диаграммы направленности (ДН) и уровнем боковых лепестков (УБЛ), то его изменение влияет на геометрию ЗО и определяет помехозащищенность РЛСО. Так, например, при большом УБЛ антенны приемник становится более восприимчивым к воздействиям помех и шумов, приходящих с направлений, отличных от интервала углов, определяемых главным лепестком ДН антенны. Кроме того, ДН антенн и их пространственное размещение, а также состояние подстилающей поверхности влияет на неравномерность распределения энергии электромагнитного поля в ЗО, что приводит к появлению зон со сниженной вероятностью обнаружения. В результате анализа параметров входящих в формулу (1) следует вывод о том, что для обеспечения высоких требований к характеристикам обнаружения РЛСО необходимо выбирать мощность передатчика достаточной для использования в требуемых условиях эксплуатации, использовать детекторы с низким уровнем собственных шумов, а также проектировать антенны с большим КУ. Тогда появляется возможность улучшить соотношение сигнал/шум.

Библиографический список

1. Магауенов Р. Г. Системы охранной сигнализации: основы теории и принципы построения: учеб. пособие. – М.: Горячая линия–Телеком, 2004. – 367 с.
2. Бартон Д. Радиолокационные системы; пер. с англ. П. Горохова, О. Казакова, А. Тупицына. М.: Военное издательство, 1967. – 480 с.
3. Радиотехнические и радиооптические системы: учеб. пособие для студентов вузов / Э. А. Засовин, А. Б. Борзов, Р. П. Быстров и др. / под ред. Э.А. Засовина. – М.: Круглый год, 2001. – 752 с.

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАНТОВЫХ МОЛЕКУЛ С КВАЗИСТАЦИОНАРНЫМИ $D^{(-)}$ -СОСТОЯНИЯМИ

А.В. Калинина, Е.Н. Калинин

Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского,
г. Пенза, Россия

Квазистационарные $D^{(-)}$ -состояния, как известно [1], возникают в случае расположения примесного уровня между дном квантовой точки (КТ) и уровнем энергии её основного состояния. Интерес к таким $D^{(-)}$ -состояниям в квантовой молекуле (КМ) (две туннельно связанные КТ) обусловлен дополнительными возможностями управления энергией связи примесного электрона за счёт варьирования параметров диссипативного туннелирования. Действительно, квазистационарные $D^{(-)}$ -состояния формируются состояниями размерно-квантованной зоны проводимости КТ. При этом влияние прозрачности потенциального барьера проявляется в уширении энергетических уровней зоны проводимости $\Delta E = \hbar\Gamma_0$ (Γ_0 – вероятность диссипативного туннелирования), что приводит к модификации волновой функции $D^{(-)}$ -состояния и, соответственно, зависимости энергии связи квазистационарных $D^{(-)}$ -состояний и их оптических свойств от параметров диссипативного туннелирования. Теоретические исследования $D^{(-)}$ -состояний с примесным уровнем, расположенным ниже дна КТ, выполнены в работе [2].

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию оптических свойств КМ с квазистационарными $D^{(-)}$ -состояниями. Теоретический подход основан на рассмотрении квантового туннелирования с диссипацией применительно к электронному транспорту в КМ, моделируемой двухямным осцилляторным потенциалом, с учётом взаимодействия с локальной фононной модой при конечной температуре. Продуктивность такого подхода обусловлена тем, что в пространстве наномасштабов физика и химия электронных процессов имеют много общего, и появляется возможность для изучения взаимодействия примесного электрона с контактной средой в рамках науки о квантовом туннелировании с диссипацией.

Расчёт средней энергии связи квазистационарного $D^{(-)}$ -состояния проведён в модели потенциала нулевого радиуса [2]. Вероятность фотоионизации $D^{(-)}$ -центра в КМ можно представить в виде:

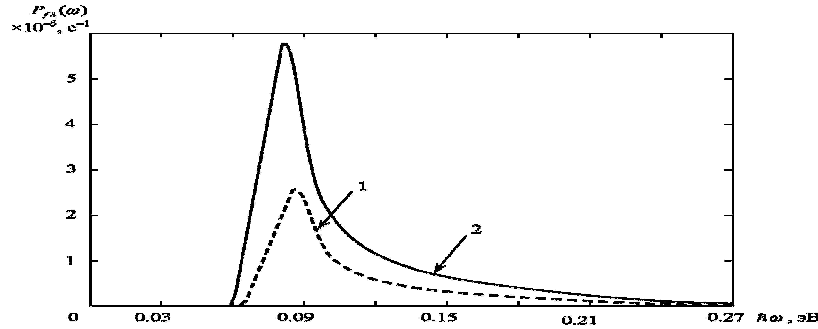
$$P_{f\lambda}(\omega) = P_0 X^{-1} \sum_{n=0}^N \frac{\mu_n!}{\left(2n + \frac{5}{2} - 2\xi_n - X\beta\right)^2 + 4\mu_n^2} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + i\mu_n - \xi_n\right)}{\Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4} + i\mu_n + \xi_n\right)} \right| \times$$

$$\times \frac{\left[\left(2n + \frac{5}{2} + 2i\mu_n - 2\xi_n\right) \left(\frac{3}{2} + 2i\mu_n - 2\xi_n\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + i\mu_n - \xi_n\right) \right]^2}{\left(\frac{3}{4} + i\mu_n - \xi_n\right) \left[\psi\left(\frac{1}{4} + i\mu_n - \xi_n\right) - \psi\left(\frac{7}{4} + i\mu_n - \xi_n\right) + 1 \right]} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2k+3)!! \Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right) \Gamma(k+2)}{k! 2^k (n-k)! \Gamma\left(k + \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{11}{4} + k + i\mu_n - \xi_n\right)} \right]^2,$$

где $P_0 = \sqrt{\pi} \alpha^* \lambda_0^2 I_0 a_d^2 / 48$; $X = \hbar \omega / E_d$; $\mu_n = 2\Gamma_0^* \beta$; $\xi_n = \eta^2 \beta / 2$;
 $N = [C]$ – целая часть числа $C = (2\beta(X + \eta^2) - 5) / 4$.

На рисунке представлена спектральная зависимость вероятности фотоионизации $D^{(-)}$ -центра в КМ для различных значений параметров $\varepsilon_T^* = kT / E_d$, $\varepsilon_C^* = \hbar \sqrt{c} / E_d$ и $\varepsilon_L^* = \hbar \omega_L / E_d$, определяющих соответственно температуру Т, константу взаимодействия с контактной средой С и частоту фононной моды ω_L .



Спектральная зависимость вероятности фотоионизации
 $D^{(-)}$ -центра в КМ при $|E_i| = 1.38 \cdot 10^{-2}$ эВ, $R_0 = 70$ нм, $U_0 = 0.42$ эВ
 для различных значений параметра
 ε_T^* ($\varepsilon_L^* = 1$, $\varepsilon_C^* = 1$): 1 – $\varepsilon_T^* = 1$; 2 – $\varepsilon_T^* = 4$

Как видно из рисунка, уменьшение средней энергии связи $\bar{E}$ квазистационарного $D^{(-)}$ -состояния с ростом ε_T^* сопровождается увеличением вероятности фотоионизации $P_{f\lambda}(\omega)$ $D^{(-)}$ -центра.

Таким образом, продемонстрировано существенное влияние параметров диссипативного туннелирования на фотоионизационные спектры квазистационарных $D^{(-)}$ -состояний в КМ. Показано, что следствием прозрачности потенциального барьера является конечное время жизни примесного электрона, которое уменьшается с ростом вероятности диссипативного туннелирования. Выявлена высокая чувствительность фотоионизационных спектров к температуре и константе взаимодействия с контактной средой. Полученные результаты открывают определённые перспективы для управления квазистационарными примесными состояниями в массиве туннельно связанных квантовых точек.

Библиографический список

1. Кревчик В.Д. Анизотропия магнитооптического поглощения комплексов «квантовая точка – примесный центр» / В.Д. Кревчик, А.Б. Грунин, Р.В. Зайцев // ФТП. – 2002. – Т. 36, № 10. – С. 1225 – 1232.
2. Кревчик В. Д. Примесное поглощение света в структурах с квантовыми точками / В.Д.Кревчик, Р.В. Зайцев // ФТТ. – 2001. – Т. 43, №3. – С. 504 – 507.

СОЗДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ЗАЧЕРПЫВАНИЯ ВОДОНАСЫЩЕННОГО МАТЕРИАЛА ГРЕЙФЕРОМ

А.С. Слюсарев, А.С. Яблоков

Волжская государственная академия водного транспорта,
г. Нижний Новгород, Россия

При зачерпывании водонасыщенного сыпучего материала под водой на челюсти грейфера действуют силы трения по днищу грейфера, силы резания материала контуром челюстей, силы фильтрации и вязкостного течения материала.

Для создания математической модели в качестве обобщенных координат примем R , φ и θ (рис. 1) [1], т.е. сферические координаты, в

которых переменные меняются в пределах $0 \leq R \leq R_0$; $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

$0 \leq \theta \leq \pi$ для одной половины грейфера.

Рассечем челюсть плоскостью I-I. При повороте плоскости на угол $d\varphi$ и $d\theta$ выделим элементарную площадку $d\omega$.

Сила трения по элементу $d\omega$ определится:

$$dF_{\text{тр}} = P_i R_0 d\varphi R_0 d\theta \mu,$$

где μ – коэффициент трения, R_0 – радиус днища сферы грейфера,

P_i – давление уплотнения водонасыщенного сыпучего материала.

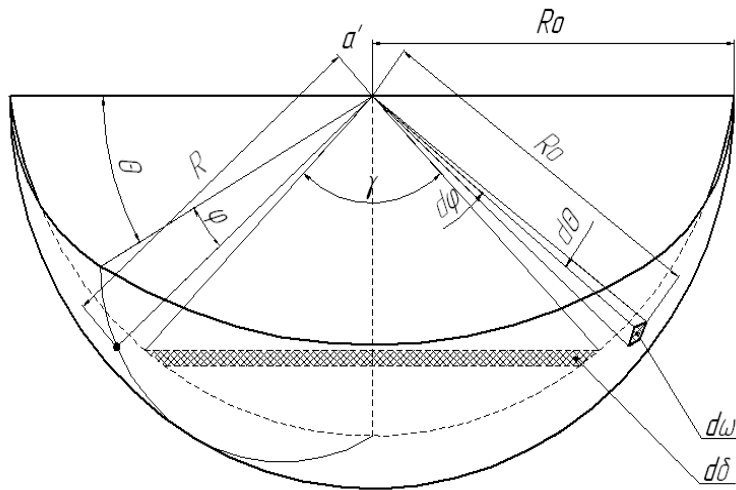


Рис. 1. Схема для определения сил трения по днищу грейфера

На изменение плотности будет влиять только изменение угла φ , поэтому определим:

$$dF_{\text{тр}} = P_0 \exp \frac{(k_p - 1) \times 2\varphi}{\psi \pi} R_0 d\varphi R_0 d\theta \mu.$$

Момент от сил трения по днищу челюсти грейфера относительно точки a' (шарнира на нижней траверсе грейфера):

$$M'_g = R_0^3 \mu P_0 \frac{\psi \pi^3}{4(k_p - 1)} \exp \frac{k_p - 1}{\psi}.$$

При повороте секущей плоскости I-I на угол $d\varphi$ (см.рис.1) в материале, заключенном в грейфере, выделится призма, изображенная на рис.2. В призме сыпучий материал имеет переменную плотность и находится в объемно-напряженном состоянии.

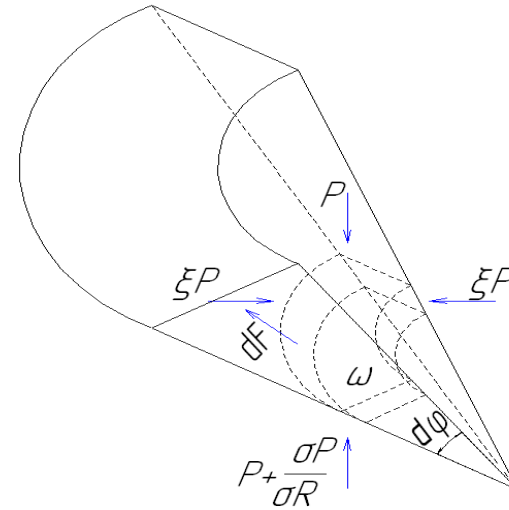


Рис. 2. Схема для определения сил сопротивления зачерпыванию от приращения давления при уплотнении сыпучего материала

Полное приращение давления по площадке элемента ω ;

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\partial p}{\partial R} R d\varphi d\theta.$$

Определим момент относительно точки a' (точка поворота челюстей грейфера) от приращения давления в сыпучем материале (см. рис 2).

$$M_{\Pi} = P_0 R \frac{\pi^2}{2} \exp \frac{2\varphi(k_p - 1)}{\psi \pi}, \text{ Н} \times \text{м}$$

Давление фильтрации жидкостей при уплотнении водонасыщенного сыпучего материала, согласно [2], определится:

$$P = P_0 \exp \frac{k_p - k}{\psi} + P_0^\Phi \exp[\epsilon_\phi (1 - \frac{1}{k}) + a_\phi].$$

Переменная площадь матрицы фильтрации сегмента грейфера (см. рис. 2) определится как

$$S_{d\delta} = \int_{\pi}^0 \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2 \gamma}{180} - \frac{R^2 \sin \gamma}{2} d\gamma.$$

Суммарный момент от сил, обусловленных приращением давления в сыпучем материале, при его уплотнении в грейфере определится:

$$M_\Phi = 0,043R^3 \left[P_0 + P_0^\Phi \exp[\epsilon_\phi (1 - \frac{1}{k}) + a_\phi] \right].$$

Момент от сил сопротивления резанию режущими поясами челюстей грейфера относительно точки a' (рис.1) определится:

$$M_P = nM_T, \text{ Н}\times\text{м},$$

где M_T – момент от сил сопротивления резанию режущей шиной челюсти; n – количество челюстей.

$$M_T = P_P B \epsilon_H h_0 \text{ Н}\times\text{м},$$

где P_P – удельное сопротивление резанию, Па; ϵ_H – расчетная толщина режущей длины, м.

Суммарный момент от сил сопротивления зачерпыванию относительно точки a' :

$$M = M_g + M_\Pi + M_\Phi + M_P, \text{ Н}\times\text{м}$$

Библиографический список

1. Никитаев И.В. Судовые энергетические грейферные установки для добычи рудных материалов на континентальном шельфе. – Нижний Новгород: ВГАВТ, 2000. – 26 с.

2. Слюсарев А.С. Разработка основ расчета и конструирования рабочих органов подъемно-транспортных машин, подвергающих сыпучий материал объемному сжатию. – Нижний Новгород: НИИВТ, 1991. – 391 с.

ЗАДАЧА ТЕПЛОМАССООБМЕНА В АКСИАЛЬНОМ ПАРОГАЗОВОМ ПОТОКЕ

В.А. Раченкова, П.С. Самоловов, Е.Г. Фоминых, Т.Э. Овчинникова

Конструкторско-технологический институт
научного приборостроения СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

Изучение процессов нуклеации является весьма перспективным направлением в современной науке. При решении многих проблем в современной аэродинамике, газодинамике, теплоэнергетике, металлургии, экологии, материаловедении и других областях науки и техники приходится обращаться к задачам, связанным с образованием зародышей новой фазы в пересыщенной среде. Применение нуклеационных методов является научной основой для генерации наночастиц, особенно в фармацевтической промышленности. Но, к сожалению, в классической теории нуклеации остается еще достаточно много дискуссионных вопросов. Более того, имеется ряд трудностей для обобщения этой теории на более сложные явления: такие, как ион-индуцированная нуклеация; нуклеация в присутствии большого количества газа-носителя и др.

Для исследования процессов нуклеации используются различные методики, основанные на различном экспериментальном оборудовании. Перспективным методом исследования процессов спонтанной нуклеации в газовой среде является метод ламинарного осесимметричного потока на основе поточной диффузионной камеры, предложенный и разработанный М.П. Анисимовым с соавторами [1]. Поточная диффузионная камера позволяет определять зависимость скорости нуклеации от активности паров исследуемого вещества при различных давлениях газа-носителя.

Одной из основных частей поточно-диффузионной камеры является цилиндрическая трубка, по которой протекает парогазовая система (рис. 1).

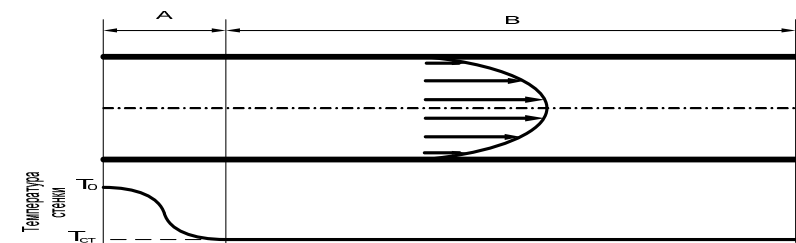


Рис. 1. Схема цилиндрической трубки с парогазовым потоком, иллюстрирующая поточную диффузионную камеру

Начальные профили скоростей газа-носителя принимаются параболическими, а концентрация пара исследуемого вещества принимается постоянной по сечению потока. Температура T_c и концентрация C_i на стенке участка трубы В (рис. 1) определяют граничные условия стационарной задачи. Изменение температуры стенки от T_0 к T_c происходит на участке перехода А. Профиль скоростей в потоке считается ламинарным и установившимся. Для того чтобы найти поля пересыщений и температур, необходимо решить задачу о стационарном осесимметричном ламинарном потоке вязкого сжимаемого газа и задачу о диффузии в бинарной парогазовой системе.

Стационарное движение осесимметричного ламинарного потока вязкого газа можно описать системой уравнений пограничного слоя и уравнения состояния, которые в системе цилиндрических координат имеют вид :

$$P = \frac{\rho \cdot R_0 \cdot T}{m} \quad (1); \quad 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R r \cdot \rho \cdot u dr = Q; \quad (2)$$

$$\rho \cdot u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (r \cdot \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial r}) \quad (3)$$

$$\rho \cdot u \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial x} - u \frac{\partial P}{\partial x} - \eta \cdot (\frac{\partial u}{\partial r})^2 - \frac{1}{r} \cdot (r \cdot \lambda \frac{\partial T}{\partial r}) = 0, \quad (4)$$

здесь x – координата по оси цилиндрической трубы, r – координата по радиусу; T – температура; ρ – плотность газа; η , λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности газа, соответственно; C_p – теплоемкость газа; R_0 – универсальная газовая постоянная; m – молекулярная масса газа; R – радиус трубки; Q – массовый расход газа.

Уравнения (1 – 4) имеют следующий физический смысл:

(1) – уравнение состояния идеального газа; (2) – уравнение неразрывности; (3) – уравнение движения (закон сохранения импульса); (4) – закон сохранения энергии (первое начало термодинамики).

Для однозначного решения этой системы уравнений принимаются следующие граничные условия:

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0} = 0; \quad \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0; \quad u(R, x) = 0; \quad T(R, x) = T_c(x); \quad T(r, 0) = T_0(r);$$

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad (5)$$

где $T_c(x)$ – заданная температура стенки трубы; $T_0(r)$ – начальный профиль температуры потока при входе в трубку; $u_0(r)$ – начальный профиль скорости потока при входе в трубку. Поля пересыщений и температур могут

быть найдены из уравнений (1 – 4) и граничных условий (5) с помощью метода конечных разностей.

Погрешность решения уравнений (1-4) определялась путем сравнения точного аналитического решения при $\rho = const$ с результатами численного счета. В случае $\rho = const$ система (1-4) является замкнутой и при $x \rightarrow \infty$ и $T_c(x) = T_c = const$ имеет точное решение:

$$u = \frac{2 \cdot Q}{R \cdot g \cdot R^4} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right); \frac{\partial P(x)}{\partial x} = -\frac{8 \cdot Q \cdot \eta}{\pi \cdot \rho \cdot R^4}; P(x) = -\frac{8 \cdot Q \cdot \eta}{\pi \cdot \rho \cdot R^4} \cdot x + P_0;$$

$$T(r) = T_c = const. \quad (6)$$

Диффузию паров исследуемого вещества в ламинарном стационарном осесимметричном потоке вязкого газа, движущемся в цилиндрической трубе, можно описать решением уравнения молекулярной диффузии, которое в цилиндрической системе координат записывается в виде:

$$\rho \cdot u \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(r \cdot \rho \frac{\partial C}{\partial r}\right) = 0. \quad (7)$$

Это уравнение возможно решить методом конечных разностей при граничных условиях: $C(R, x) = C^0(T_c(x))$; $\left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$; $C(r, 0) = C^*(r)$,

где C – массовая концентрация пара исследуемого вещества; D – коэффициент молекулярной диффузии; $C^0(T_c(x))$ – концентрация насыщенного пара вещества на стенке трубки (предполагалось, что внутренняя сторона трубки покрыта исследуемым веществом); $C^*(r)$ – начальный профиль концентрации пара на входе в трубку.

Коэффициент диффузии D [см²/с] рассчитывается для бинарных газовых систем по эмпирической корреляции Фуллера, Шлеттера и Гиддингса [3]:

$$D_i = \frac{0,001 \cdot T^{1,75} \cdot \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 \cdot M_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{P \cdot \left[(\sum V)_1^{\frac{1}{3}} + (\sum V)_2^{\frac{1}{3}}\right]^2}, \quad (8)$$

где P – общее давление, выражено в барах; M_1, M_2 – молекулярные массы исследуемого вещества и соответствующего газа-носителя; $(\sum V)_1, (\sum V)_2$ – молекулярные диффузионные объемы компонент.

Активность паров исследуемого вещества $a(r, x)$ определяется из распределений температуры $T(r, x)$ и концентрации $C(r, x)$ через соотношение

$a(r, x) = \frac{C(r, x)}{C^0(r, x)}$, где $C^0(r, x)$ – концентрация насыщенного пара исследуемого вещества при температуре $T(r, x)$. Решения для $T(r, x)$ показаны на графике, приведённом на рис. 2.

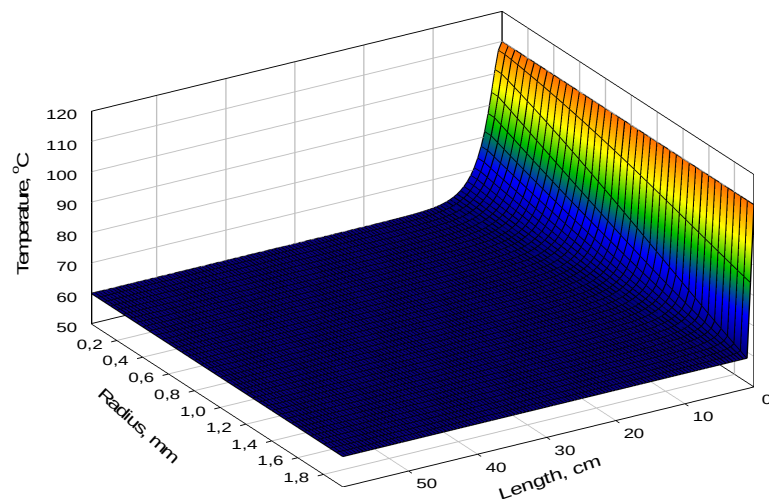


Рис. 2. Распределение температур в конденсирующем устройстве

Для определения скорости нуклеации по эмпирическим значениям концентрации образующегося аэрозоля используют выражение $J = C / t$, где J ($\text{см}^3/\text{с}$) – расчетная скорость нуклеации; C , (см^3) – экспериментально найденная концентрация аэрозоля; t (с) – время пребывания в нуклеационном объеме парогазовой смеси. Этот метод позволяет находить среднюю скорость генерирования аэрозольных частиц в нуклеационном объеме, имеющем неоднородное распределение условий зародышеобразования.

Более точное значение скорости нуклеации может быть найдено при следовании достаточно простому алгоритму. Очевидно, что отношение максимума теоретической скорости нуклеации J_{theor}^{max} к расчетному числу аэрозольных частиц ($N_{theor} = \int J_{theor} dv$), производимых аэрозольным генератором в единицу времени, примерно равно соответствующему значению экспериментальных величин, т.е.

$$\frac{J_{theor}^{max}}{\int J_{theor} dv} \cong \frac{J_{exp}^{max}}{N_{exp}}.$$

Неточность равенства связана с недостатками теории. Однако использование теоретических величин позволяет определять отношения с небольшой погрешностью, поскольку недостаточно хорошо определенные коэффициенты теоретического выражения для скорости нуклеации практически точно сокращаются. Это подтверждается сравнением расчетного и экспериментально определенного объемов нуклеации. Отсюда легко получить выражение для максимума скорости нуклеации:

$$J_{exp}^{max} = \frac{N_{exp} J_{theor}^{max}}{\int J_{theor} dv}, \text{ где } N_{exp} \int J_{theor} dv - \text{экспериментальное}$$

и теоретическое число частиц, произведенных генератором аэрозолей в единицу времени; J_{theor}^{max} – теоретическая скорость нуклеации в зоне наиболее интенсивного зародышеобразования. При соблюдении подобия в распределении концентраций пара и температур (это в эксперименте выполняется) исключается зависимость значения максимальной скорости нуклеации от расхода газа, что снижает требования к точности измерения последнего. Экспериментальное изучение скоростей объемной конденсации является чрезвычайно трудной задачей, так как параметры процесса, характеризующие процессы образования новой фазы, быстро меняются во времени и пространстве, что крайне осложняет их измерение. Нуклеация в пересыщенном паре изучается различными методами, целью которых является получение скоростей нуклеации и соответствующих ей значений пересыщений и температур, которые используют как для сравнения с классической теорией, так и с различными ее модификациями.

В настоящей статье приведены постановка и численное решение задачи тепломассообмена для аксиальной симметрии парогазового потока. Обосновываются и приводятся алгоритмы эмпирического определения скоростей нуклеации в поточной диффузионной камере. Результаты могут быть применимы для теоретических расчетов скоростей зародышеобразования на участках технологических цепей, представляющих поток парогазовой смеси в охлаждаемой трубе. Компьютерная оптимизация позволит неэмпирическим путем подобрать близкие к оптимальным условия протекания смеси. В одних случаях необходимо снизить содержание аэрозоля на выходе, поскольку это может привести к появлению аэрозольных вкраплений в конечное изделие. В другом варианте задачи можно создать условия для генерации аэрозольных частиц. Оптимизация условий позволяет получать наночастицы, которые обладают рядом уникальных свойств в сравнении с макроскопической фазой образца производимого материала. Создание и углубление научных основ в производстве наноматериалов

имеет ясную перспективу в улучшении потребительских свойств широкого спектра материалов.

Авторы благодарят М.П. Анисимова за помощь в выполнении данной работы и РФФИ за финансовую поддержку через грант № 11-03-00049-а.

Библиографический список

1. Анисимов М.П. Объемная нуклеация в ламинарном осесимметричном парогазовом потоке: дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Кемерово, 1991.
2. Фольмер М. Кинетика образования новой фазы. – М: Наука, 1986.
3. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945.

ТЕПЛОМАССОБМЕН В АКСИАЛЬНОМ ЛАМИНАРНОМ ПАРОГАЗОВОМ ПОТОКЕ С УЧЁТОМ НЕИДЕАЛЬНОСТИ ГАЗА

В.А. Раченкова, П.С. Самоловов, Е.Г. Фоминых, М.П. Анисимов

Конструкторско-технологический институт
научного приборостроения СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

Процесс зарождения новой фазы – *нуклеация* – является предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований, например, [1]. Именно с нуклеации начинаются все фазовые переходы первого рода. Исключительно важна как фундаментальная сторона вопроса, связанная с кинетикой фазового перехода, так и практическая – необходимость создания инженерных методов расчета процессов образования новой фазы, потребность в которых испытывают многие отрасли науки и техники.

В нашей работе решается задача тепломассообмена для поточной диффузионной камеры, предложенной ранее в СОАН СССР в 1978 г. [3 и др.]. Прибор получил распространение в различных странах мира: Финляндии, Австрии, Чехии, Японии, США [2]. Исследование нуклеации в первых вариантах прибора проводились до давлений 3-4 атмосферы, что позволяло использовать для расчётов тепломассообмена систему уравнений Навье-Стокса с уравнением состояния в приближении идеальных газов. Необходимость исследования нуклеации в окрестностях критических условий влечёт за собой переход к давлениям в 100 и более атмосфер. Это неизбежно приводит к необходимости использовать реальное уравнение состояния парогазового потока и реальные коэффициенты переноса. Частные примеры решения подобных задач известны, но для поточной диффу-

зионной камеры такие решения отсутствуют. Результаты известных решений не могут быть применены для обработки и интерпретации результатов измерений с помощью поточной диффузионной камеры. Задачей настоящей работы являлись разработка и реализация алгоритма для описания тепломассообмена в аксиальном неидеальном парогазовом потоке, применимом для давлений в несколько сотен атмосфер.

Для описания задачи тепломассообмена использовалась система, состоящая из пяти уравнений с соответствующими условиям эксперимента граничными условиями.

$$(1) (r\rho u)_x = 0;$$

$$(2) Z = \frac{P\mu}{\rho RT} = f(\rho, T);$$

$$(3) \rho u u_x + P_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\mu(T) \frac{\partial u}{\partial r});$$

$$(4) \rho u c_p T_x = u P_x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\vartheta(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right);$$

$$(5) \rho u C_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho d(T) \frac{\partial C}{\partial r});$$

(1) – уравнение неразрывности, (2) – уравнение состояния для неидеального газа [4]; (3) – уравнение движения (закон сохранения импульса); (4) – закон сохранения энергии (первое начало термодинамики); (5) – уравнение для диффузии пара в газе. Здесь c_p – удельная теплоёмкость газа; $\mu(T)$ – коэффициент вязкости; $\vartheta(T)$ – теплопроводность газа; $d(T)$ – коэффициент диффузии рабочего вещества в газе-носителе.

Поскольку газ не является идеальным, то для повышенных давлений использование уравнения состояния идеального газа должно приводить к возрастающей с давлением ошибке. Возникает необходимость применения уравнения реального газа в уравнении (2), которое должно на современном уровне точности описывать термодинамические свойства разреженных газов, газов малой плотности и отчасти умеренно плотных газов. Остановимся подробнее на равенстве (2). Правая часть уравнения имеет следующий вид:

$$f(\rho, T) = 1 - c_1 \left(e^{\frac{1}{\tau}} - 1 \right) \omega - c_2 \left(e^{\frac{1}{\tau}} - 1 \right)^2 \omega^2 - c_3 \left(e^{\frac{1}{\tau}} - 1 \right) \omega \varphi(\omega) - \frac{c_4}{\tau} \omega + \frac{c_5}{\tau} \omega \varphi(\omega) + c_6 \omega e^{c_7 \omega}$$

где $\omega = \frac{\rho}{\rho_c}$, $\tau = \frac{T}{T_c}$, а функция φ определяется следующим образом:

$$\varphi(\omega) = 1 - 2\omega + 3\left(\frac{1}{2} - Z_c\right)\omega^2 + 4\left(Z_c - \frac{1}{6} - Z_c^2\right)\omega^3 - c_0\omega^5;$$

где коэффициенты $c_0, \dots, c_7, Z_c, \rho_c, T_c$ зависят от исследуемого газа (см. [4]).

Зная температуру T и давление P , можно вычислить плотность ρ , входящую в состав уравнения (2). Для нахождения плотности использовался численный метод бисекций. Вначале выбирается маленькое значение плотности, к примеру, $\rho_0 = 10^{-19}$. Затем выбирается начальное приращение плотности. Например, $step_\rho = 10^{-4}$. Добавляя приращение к начальной плотности на каждой итерации, будем получать новые значения плотности $\rho_{next} = \rho_{previous} + step_\rho$. Поскольку уравнение (2) имеет вид

$$\frac{P\mu}{\rho RT} = f(\rho, T),$$

то для каждого нового значения плотности ρ_{next} вычисляются и сравниваются между собой левые и правые части равенства. Перепишем уравнение (2), чтобы оно имело вид функции:

$$y(\rho) = \frac{P\mu}{\rho RT} - f(\rho, T).$$

Тогда, если для предыдущего значения плотности $y(\rho_{previous}) < 0$, а $y(\rho_{next}) > 0$ (и наоборот), то шаг приращения уменьшается в 2 раза, и итерации продолжаютс я начиная с предыдущего значения плотности. Данная процедура производится до тех пор, пока $|y(\rho)|$ не станет меньше наперед заданного малого числа ε (в нашем расчете порядка 10^{-16}).

Вычисление плотности играет промежуточную роль в решении задачи тепломассообмена. Зная ρ , при помощи разностных схем решаются уравнения (3) – (5).

Остановимся подробнее на решении системы уравнений. Для нахождения скорости u и давления P применяется метод прогонки с параметром. Для этого аппроксимируем уравнение (1).

$$rb_0(r) \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta x_n} + rP_x^{n+1} = D_r(u^{n+1}) \quad (*)$$

Представим скорость на $n+1$ шаге по x в следующем виде:

$$u^{n+1} = u^n + z^{n+1} + P_x^{n+1} y^{n+1} \quad (**)$$

Подставляя выражение (**) в уравнение (*) и собирая члены, содержащие P_x^{n+1} и не содержащие их, получим два уравнения.

$$rb_0(r) \frac{z^{n+1}}{\Delta x_n} = D_r(z^{n+1}) + D_r(u_n);$$

$$rb_0(r) \frac{y^{n+1}}{\Delta x_n} = D_r(y^{n+1}) - r,$$

где $D_r(t) = \frac{\partial}{\partial r} (r\mu \frac{\partial}{\partial r} (t))$.

Для определения P_x^{n+1} пользуемся массовым расходом, который не зависит от x .

$$Q = 2\pi \int_0^R \rho u \, dr$$

Интегрируя соотношение (**) вдоль радиуса, получим:

$$\int_0^R r \rho^n u^{n+1} \, dr = \int_0^R r \rho^n u^n \, dr + \int_0^R r \rho^n z^{n+1} \, dr + P_x^{n+1} \int_0^R r \rho^n y^{n+1} \, dr,$$

$$P_x^{n+1} = - \frac{\int_0^R r \rho^n z^{n+1} \, dr}{\int_0^R r \rho^n y^{n+1} \, dr}.$$

А затем

$$P^{n+1} = P^n + P_x^{n+1} \Delta x.$$

После того как найдены скорость и давление на $(n+1)$ -м слое, определяем температуру и плотность на этом же слое. А поскольку вязкость и теплопроводность зависят от температуры, то делаем здесь несколько итераций. Затем находим концентрацию пара на $(n+1)$ -м слое.

Все линейные уравнения, получающиеся в результате разностных аппроксимаций, решаются методом трёхдиагональной монотонной прогонки.

Распределение скоростей нуклеации

Для примера ниже приведены графики распределения скоростей нуклеации паров глицерина в среде углекислого газа при давлении 1 и 5 атмосфер соответственно.

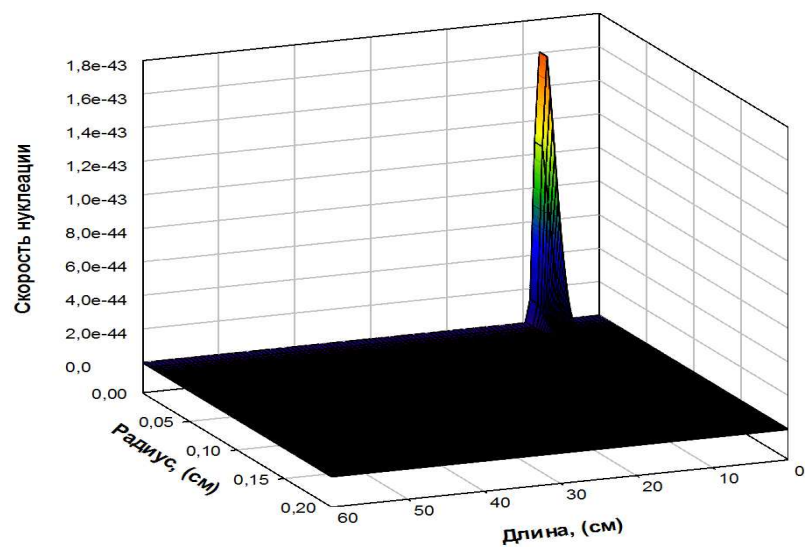


Рис. 1. График распределения скоростей нуклеации при давлении 1 атмосфера

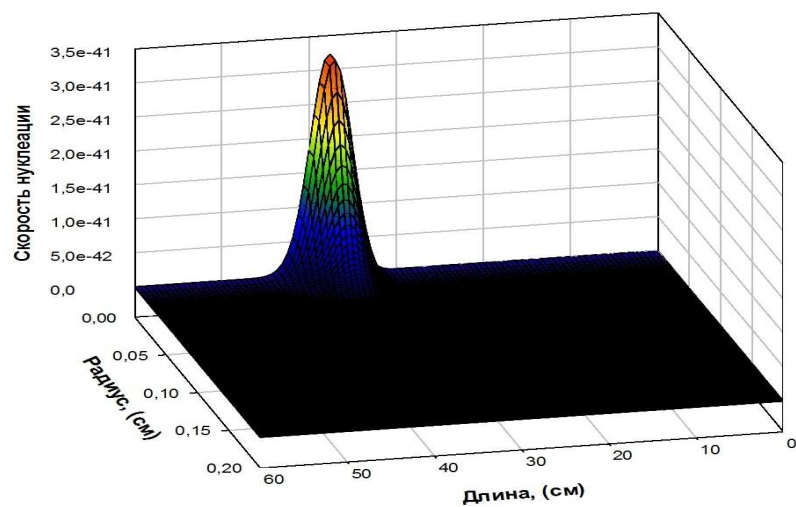


Рис. 2. График распределения скоростей нуклеации при давлении 5 атмосфер

Подход к решению задачи тепломассообмена с применением уравнения реального газа влечёт улучшение получаемых результатов, поскольку гораздо точнее аппроксимирует процесс зародышеобразования в поточной диффузионной камере.

Выводы

Разработан итерационный алгоритм, позволяющий рассчитать условия зародышеобразования в поточной диффузионной камере на примере неидеального газа (CO_2). Обнаружено, что данный подход даёт результаты, отличные от полученных с помощью применения состояния для идеального газа, причём разница заметно увеличивается при больших значениях давления (20 и более атмосфер).

Авторы благодарят РФФИ за грант № 11-03-00049-а.

Библиографический список

1. Анисимов М.П., Фоминых Е.Г. Современные исследования нуклеации: эксперимент и полуэмпирические подходы // Химическая физика, 29(1), 75-85 (2010).
2. Michael P. Anisimov, Elena G. Fominykh, Sergey V. Akimov, Philip K. Hopke. Vapor-Gas/Liquid Nucleation Experiments: A Review of the Challenges // J. Aerosol Sci. 40, 733-746, 2009.
3. Анисимов М.П., Костровский В.Г., Штейн М.С. (1978) Измерение числа молекул и поверхностного натяжения в критических зародышах по скорости зародышеобразования // Коллоидн. ж. – Т. 40, №2. С. 317 – 321.
4. Каплун А.Б., Мешалкин А.Б. Уравнение состояния плотных газов однокомпонентных веществ // Доклады Академии наук. – 2003. – Т. 392, №1. – С. 48 – 53.

МОДЕЛЬ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО $D^{(-)}$ -СОСТОЯНИЯ В КВАНТОВОЙ МОЛЕКУЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В.Д. Кревчик, З.А. Гаврина, С.А. Губина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Привлекательность полупроводниковых наноструктур с примесными резонансными состояниями связана с возможностью создания новых источников стимулированного излучения на примесных переходах [1, 2]. В этой связи становится актуальным теоретическое исследование влияния различных факторов на время жизни примесных резонансных состояний, которое является основным параметром, опреде-

ляющим возможность получения инверсии заселённости, а также порог генерации на примесных переходах.

Цель настоящей работы заключается в теоретическом исследовании влияния внешнего электрического поля и туннельного распада на среднюю энергию связи резонансных $D^{(-)}$ -состояний и ширину резонансного уровня в квантовой молекуле. Предполагалось, что распадность примесного резонансного уровня обусловлена процессом диссипативного туннелирования. Расчёты средней энергии связи и ширины уровня резонансного $D^{(-)}$ -состояния выполнены в модели потенциала нулевого радиуса. Расчёт вероятности туннелирования проведён в одноинстантонном приближении с учётом взаимодействия с локальной фононной модой среды.

Квантовая молекула (КМ) моделируется двухъямным осцилляторным потенциалом, т. е. представляет собой две туннельно связанные сферические квантовые точки (КТ). Донорный уровень резонансного $D^{(-)}$ -состояния расположен между дном КТ и уровнем энергии её основного состояния, а $D^{(-)}$ -центр расположен в точке $\vec{R} = (x_a, y_a, z_a)$. Удерживающий потенциал КТ моделируется потенциалом трёхмерного гармонического осциллятора:

$$V(x, y, z) = \frac{m^* \omega_0^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{2}, \quad (1)$$

где m^* – эффективная масса электрона; ω_0 – характерная частота удерживающего потенциала КТ.

Оператор Гамильтона при наличии внешнего электрического поля в декартовой системе координат имеет вид:

$$\hat{H}_{QD}^E = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + \frac{m^* \omega_0^2}{2} (x^2 + y^2 + z^2) - |e| x E, \quad (2)$$

где E – напряженность внешнего электрического поля $\vec{E} = (E, 0, 0)$;

$|e|$ – величина заряда электрона.

Потенциал $D^{(-)}$ -центра моделируется потенциалом нулевого радиуса мощностью $\gamma = 2\pi\hbar^2 / (\alpha m^*)$:

$$V_\delta(\vec{r}; \vec{R}_a) = \gamma \delta(\vec{r} - \vec{R}_a) [1 + (\vec{r} - \vec{R}_a) \vec{\nabla}_{\vec{r}}], \quad (3)$$

где α определяется энергией E_i связанного состояния такого же $D^{(-)}$ -центра в объемном полупроводнике.

Собственные значения E_{n_1, n_2, n_3} и соответствующие собственные волновые функции $\Psi_{n_1, n_2, n_3}^{\varepsilon}(x, y, z)$ гамильтониана (2) имеют вид:

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \hbar \omega_0 \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right) - \frac{e^2 E^2}{2m^* \omega_0^2}, \quad (4)$$

$$\Psi_{n_1, n_2, n_3}^{\varepsilon}(x, y, z) = \left(a_0^3 \cdot \pi^{3/2} \cdot n_1! n_2! n_3! 2^{n_1 + n_2 + n_3} \right)^{-1/2} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}{2a_0^2} \right] \cdot H_{n_1} \left(\frac{x-x_0}{a_0} \right) \cdot H_{n_2} \left(\frac{y}{a_0} \right) \cdot H_{n_3} \left(\frac{z}{a_0} \right), \quad (5)$$

где $a_0 = \sqrt{\hbar / (m^* \omega_0)}$; $x_0 = |e| E / (m^* \omega_0^2)$; n_1, n_2, n_3 – осцилляторные квантовые числа; $H_n(x)$ – полином Эрмита.

Задача определения волновой функции и средней энергии $\bar{E}$ резонансного $D^{(-)}$ -состояния состоит в построении одноэлектронной функции Грина $G^{\varepsilon}(x, y, z, x_a, y_a, z_a, E_{\lambda})$ для уравнения Шредингера с гамильтонианом рассматриваемой задачи:

$$G^{\varepsilon}(\vec{r}, \vec{r}_1; E_{\lambda}) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{\Psi_{n_1, n_2, n_3}^*(\vec{r}_1) \Psi_{n_1, n_2, n_3}(\vec{r})}{\left(E_{\lambda} - E_{n_1, n_2, n_3} + \frac{e^2 E^2}{2m^* \omega_0^2} - i\hbar \Gamma_0 \right)}, \quad (6)$$

где Γ_0 – вероятность распада резонансного $D^{(-)}$ -состояния; E_{λ} – комплексная энергия, соответствующая резонансному $D^{(-)}$ -состоянию.

Согласно методу потенциала нулевого радиуса [3], энергия резонансного состояния электрона является полюсом функции Грина, т. е. решением уравнения

$$\alpha = \frac{2\pi \hbar^2}{m^*} \left(\hat{T} G \right) (\vec{R}_a, \vec{R}_a; E_{\lambda}), \quad (7)$$

где $\hat{T} \equiv \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{R}_a} [1 + (\vec{r} - \vec{R}) \vec{\nabla}_{\vec{r}}]$.

Очевидно, что чем меньше энергия связи, тем легче система разваливается под действием внешнего электрического поля. Распад резонансного $D^{(-)}$ -состояния в рассматриваемом нами случае происходит за счёт туннельного перехода.

Используя (4)-(7) и выполняя необходимые предельные переходы, получим дисперсионное уравнение для определения средней энергии $\bar{E} = \text{Re} E_\lambda$ и ширины резонансного уровня $\Delta E = 2 \text{Im} E_\lambda$:

$$\sqrt{-\eta^2 + \frac{3}{2}\beta^{-1} + 4i\Gamma_0^* - \frac{x_0^2 a_d^2}{a_0^4}} = \eta_i - \sqrt{\frac{2}{\beta\pi}} \int_0^\infty dt \exp\left[-\left(-\beta\eta^2 + \frac{3}{2} + 4i\Gamma_0^*\beta - \frac{2x_0^2 a_d^2}{a_0^4}\right)t\right] \left[\frac{1}{2t\sqrt{t}} - \frac{1}{[1 - \exp(-2t)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{R_a^{*2}}{2\beta} t \frac{t}{2}\right]\right], \quad (8)$$

где $\eta^2 = E_\lambda / E_d$; $\eta_i = \sqrt{E_i / E_d}$; $\beta = R_0^* / (4\sqrt{U_0^*})$;

$R_0^* = 2R_0 / a_d$; $U_0^* = U_0 / E_d$; U_0 – амплитуда потенциала кон-
файнмента КТ: $U_0 = m^* \omega_0^2 R_0^2 / 2$; $R_a^* = R_a / a_d$;
 $\Gamma_0^* = \hbar \Gamma_0 / (4E_d)$; E_d и a_d – эффективные боровская энергия и
радиус соответственно.

Следует отметить, что параметрами диссипативного туннелирова-
ния являются $\mathcal{E}_T^* = kT / E_d$, $\mathcal{E}_c^* = \hbar \sqrt{c} / E_d$ и $\mathcal{E}_L^* = \hbar \omega_L / E_d$,
содержащие соответственно температуру, константу взаимодействия
“с” туннелирующего электрона с контактной средой и частоту фонон-
ной моды ω_L .

На рис. 1 представлена зависимость средней энергии связи $\bar{E}$ ре-
зонансного $D^{(-)}$ -состояния от радиуса R_0 InSb КТ для различных значе-
ний E и параметров диссипативного туннелирования, рассчитанная с
помощью уравнения (8). Можно видеть, что при уменьшении R_0 сред-
няя энергия связи резонансного $D^{(-)}$ -состояния сначала увеличивается
из-за всё более сильной локализации волновой функции электрона по
трём пространственным направлениям. Но при дальнейшем уменьше-
нии R_0 волновая функция начинает “выжиматься” из КТ, поэтому сред-
няя энергия связи уменьшается. Видно также (сравн. кривые 1 и 2 на
рис. 1), что в электрическом поле средняя энергия связи резонансного
 $D^{(-)}$ -состояния уменьшается, что связано с электронной поляризацией и
штарковским сдвигом энергии. Рост параметра $\mathcal{E}_T^*$ приводит к увели-

чению вероятности распада и к соответствующему уменьшению величины $\bar{E}$ (сравн. кривые 2 и 3 на рис. 1).

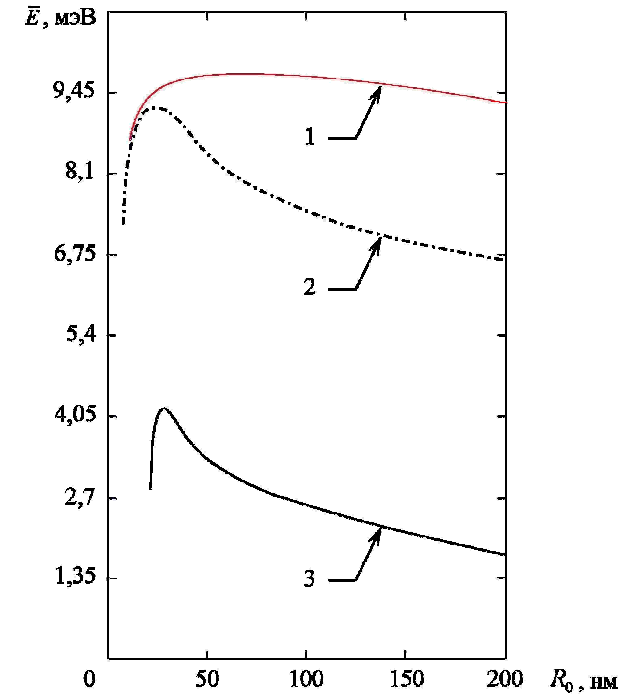


Рис. 1. Зависимость средней энергии связи резонансного $D^{(-)}$ -состояния $\bar{E}$ от радиуса КТ R_0 при $U_0 = 0,4$ эВ, $X_a^* = Y_a^* = Z_a^* = 0$, $E_i = 1.38 \cdot 10^{-2}$ эВ для различных значений E и параметров диссипативного туннелирования:

$$1 - \mathcal{E}_L^* = 1, \mathcal{E}_C^* = 1, \mathcal{E}_T^* = 1, E = 0 \text{ кВ/см}; 2 - \mathcal{E}_L^* = 1, \mathcal{E}_C^* = 1, \mathcal{E}_T^* = 1, E = 32 \text{ кВ/см}; 3 - \mathcal{E}_L^* = 1, \mathcal{E}_C^* = 1, \mathcal{E}_T^* = 3, E = 32 \text{ кВ/см}$$

На рис. 2 приведена зависимость ширины ΔE резонансного уровня от координаты $D^{(-)}$ -центра в x -направлении КТ для различных значений параметров диссипативного туннелирования. Из рис. 2 видно, что наименьшее время жизни имеют резонансные $D^{(-)}$ -состояния, соответствующие $D^{(-)}$ -центрам, расположенным вблизи границ КТ. Рост

параметра $\mathcal{E}_C^*$ блокирует туннельный распад резонансного состояния за счёт увеличения «вязкости» контактной среды, в то время как рост параметров $\mathcal{E}_L^*$ и $\mathcal{E}_T^*$ увеличивает вероятность распада.

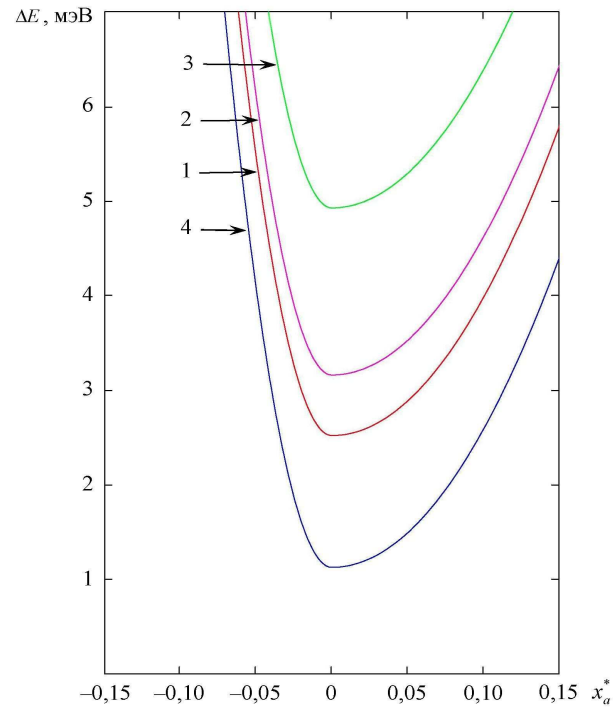


Рис. 2. Зависимость ширины резонансного уровня ΔE от координаты

X_a^* $D^{(-)}$ -центра в КТ при $R_0 = 70$ нм, $U_0 = 0,38$ эВ, $E = 15$ кВ/см

для различных значений параметров диссипативного туннелирования:

1 – $\mathcal{E}_L^* = 1, \mathcal{E}_C^* = 1, \mathcal{E}_T^* = 1$; 2 – $\mathcal{E}_L^* = 3, \mathcal{E}_C^* = 1, \mathcal{E}_T^* = 1$;

3 – $\mathcal{E}_L^* = 1, \mathcal{E}_C^* = 1, \mathcal{E}_T^* = 3$; 4 – $\mathcal{E}_L^* = 1, \mathcal{E}_C^* = 3, \mathcal{E}_T^* = 1$

Библиографический список

1. Blom A., Odnoblyudov M. A., Cheng H.H., Yassievich I.N., Chao K.A. Appl. Phys. Lett., 79, 713 (2001).

2. Altukhov I.V., Chirkova E. G., Sinis V. P., Kagan M. S., Gousev Yu. P., Thomas S. G., Wang K. L., Odnoblyudov M. A., Yassievich I.N. Appl. Phys. Lett., 79, 3909 (2001).

3. Кревчик В.Д. Примесное поглощение света в структурах с квантовыми точками / В. Д. Кревчик, Р. В. Зайцев // ФТТ. – 2003. – Т. 43, № 3. – С. 504-507.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРАБОТКИ ГАЗОГИДРАТНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

О.А. Быкова

Новосибирский государственный технический университет,
г. Новосибирск, Россия

В настоящее время для большинства ученых развитых стран первоочередной задачей становится изучение и последующая добыча альтернативного топлива будущего – газовых гидратов [1].

Газовые гидраты (также клатраты) – кристаллические соединения, образующиеся при определенных термобарических условиях из воды и газа [2].

Наиболее распространенным газом, формирующим газогидраты, является метан. Исследования последних двух десятилетий показали, что залежи гидрата метана в толще вечной мерзлоты на суше и под океанским дном могут соперничать со всеми обычными месторождениями энергоносителей. По предварительным оценкам, общие объемы метана в природных гидратах оцениваются огромными цифрами – от 3000 до 7000 трлн. м³. Для сравнения, оценка оставшихся и неоткрытых мировых запасов традиционного природного газа составляет всего около 370 трлн. м³ [3]. Кроме этого, горение метана выделяет значительно меньше CO₂ в атмосферу, чем сжигание угля или нефти.

Ученые утверждают, что добыча газогидратов может только усугубить глобальное потепление, поскольку метан является одним из главных виновников так называемого парникового эффекта. Но с другой стороны нельзя исключать возможность неконтролируемого выделения метана в результате повышения температуры. Поэтому необходим наиболее безопасный и экологически правильный способ освоения залежей гидратов, который в случае успеха подавит всю критику.

Одним из таких методов освоения газогидратов может оказаться схема добычи газогидратов [4] (рисунок), состоящая из:

тепловыделяющего элемента, который изготавливают из отработанного ядерного топлива АЭС;

скважины и гибких трубопроводов, предназначенных для транспортировки жидкой пульпы;

центрифуги для разделения газа, жидкости и примесей из пульпы;

устройства по сжижению газа за счет повышения давления и умеренного понижения температуры;

гибких трубопроводов, выдерживающих давление;

плавающей затопленной платформы для накопления сжиженного газа;

плавающего причала для танкера;

подводной станции из современных прочных материалов;

автоматической системы управления;

микросейсмики для разведки трещин и контроля за разгазированием газогидратного пласта.

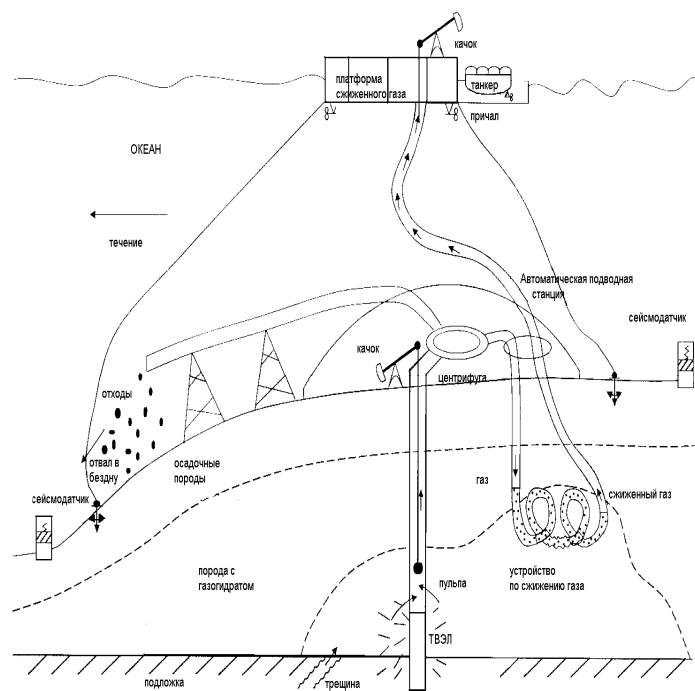


Схема добычи газовых гидратов

Рассмотрим односкоростную n -компонентную смесь, аналогично тому, как это сделано в работе [5]. Выпишем уравнения, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии для i -го компонента смеси, относящиеся к фиксированному в пространстве конечному объему V и имеющие вид:

$$\int_V \frac{\partial \alpha_i \rho_i^0}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \alpha_i \rho_i^0 u \cdot n \cdot d\Sigma = \sum_{j=1}^{n(j \neq i)} \int_V J_{ij} dV, \quad (1)$$

$$\int_V \frac{\partial \alpha_i \rho_i^0 u}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \alpha_i \rho_i^0 (u \cdot n) u \cdot d\Sigma = - \int_{\partial V} \alpha_i p \cdot n \cdot d\Sigma + \int_V \alpha_i F dV + \sum_{j=1}^{n(j \neq i)} \int_V f_{ij} dV; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_i \rho_i^0 \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2} |u|^2 \right) \right] dV + \int_{\partial V} \alpha_i \rho_i^0 \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2} |u|^2 \right) u \cdot n \cdot d\Sigma = \\ & = - \int_{\partial V} \alpha_i p u \cdot n d\Sigma + \int_V \alpha_i F \cdot u dV + \sum_{j=1}^{n(j \neq i)} \int_V f_{ij} \cdot u dV + \sum_{j=1}^{n(j \neq i)} \int_V R_{ij} dV - \int_{\partial V} \alpha_i W_i \cdot n d\Sigma, \end{aligned} \quad (3)$$

где u – вектор скорости; n – внешняя единичная нормаль к поверхности ∂V , ограничивающей рассматриваемый объем V ; α_i – объемная доля i -й фракции в смеси; J_{ij} – интенсивность превращения массы из i -й фракции в j -ю в единице объема смеси; F – плотность массовой силы; f_{ij} – сила межфракционного взаимодействия между i -й и j -й составляющими, приходящаяся на единицу объема смеси; ε_i – удельная внутренняя энергия i -го компонента; Q_{ij} – тепловыделение в единицу времени на единицу объема смеси, возникшее вследствие превращения i -й фракции в j -ю; R_{ij} – количество тепла в единицу времени на единицу объема смеси, которое поступает от i -й фракции в j -ю вследствие излучения; W_i – вектор плотности теплового потока, связанный с температурой T_i законом Фурье:

$$W_i = -\chi_i \text{grad} T_i, \quad (4)$$

где χ_i – коэффициент теплопроводности, относящийся к i -й фракции. Передача тепла по закону Фурье происходит лишь в тех компонентах, которые в связанном виде заполняют занятое средой пространство. Например, в пузырьковой жидкости фракцией, проводящей тепло, является жидкий компонент.

Рассматриваем приближенную модель, в которой ничтожно малы значения Q_{ij} , расчет ведется до центрифуги, также $J_{ij}=0$ и $f_{ij}=0$, так как нет фазового перехода. Поэтому данные параметры не учитываются при построении математической модели до центрифуги. В устройстве же по сжижению газа значение Q_{ij} значительно относится к фазовому переходу.

В силу произвольности выбранного жидкого объема из интегральных законов сохранения следует их дифференциальная форма.

$$\frac{\partial \alpha_i \rho_i^0}{\partial t} + \text{div}(\alpha_i \rho_i^0 u) = 0; \quad (5)$$

$$\alpha_i \rho_i^0 \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] + \text{grad}(\alpha_i p) = \alpha_i F; \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_i \rho_i^0 \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2} |u|^2 \right) \right] + \text{div} \left[\alpha_i \rho_i^0 \left(\varepsilon_i + \frac{1}{2} |u|^2 u \right) \right] + \text{div}(\alpha_i p u) + \text{div}(\alpha_i W_i) = \alpha_i F \cdot u + \sum_{i=1}^{n(j \neq i)} R_{ij}, \quad (7)$$

Если просуммировать каждое из уравнений (5) – (7) по индексу i от 1 до n , то получим законы сохранения массы, импульса и энергии для смеси в целом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0; \quad (8)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] + \text{grad}(p) = F; \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |u|^2 \right) \right] + \text{div} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |u|^2 + \frac{p}{\rho} \right) u + \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i \right] = F \cdot u, \quad (10)$$

где ε – удельная внутренняя энергия смеси, определяемая из выражения

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \rho_i \varepsilon_i. \quad (11)$$

Уравнения (8) – (10) выражают классические законы сохранения массы, импульса и энергии, таким образом, многофазная модель в виде уравнений (5) – (7) находится в полном соответствии с физической моделью механики сплошной среды.

В дальнейшем предполагается осуществить расчет движения среды на различных этапах в соответствии со схемой на рисунке. Для описания движения пульпы в скважине и трубопроводе до центрифуги предполагается рассмотреть трехфазную математическую модель, а в устройстве по

сжижению газа – двухфазную модель, в которой будет учитываться фазовый переход.

Библиографический список

1. Соловьёв В.А. Природные газовые гидраты как потенциальное полезное ископаемое // Российский химический журнал. – 2003. – Т. 48. – №3. – С. 59 – 69.
2. Дядин Ю.А., Гуцин А.Л. Газовые гидраты // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №3. – С. 55 – 64.
3. Коллет Т.С., Льюис Р., Такаши У. Растущий интерес к газовым гидратам // Schlumberger. Нефтегазовое обозрение. – 2001. – Т.6, №2. – С. 38 – 54.
4. Хабиров В.В., Хабиров С.В. Разработка газогидратов современными технологиями // Труды Института механики УНЦ РАН. – Уфа, 2010. – С. 210 – 230.
5. Суров В.С. Односкоростная модель гетерогенной среды с гиперболическим адиабатическим ядром // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т.48, №6. – С. 1 – 15.

ОБЛАЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ПЛАТФОРМЕ WINDOWS AZURE

О.Е. Каледин

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
г. Саранск, Россия

Технологии облачных вычислений – бурно развивающаяся область ИТ. Различные приложения, которые выполняют множество сложных вычислений, например, моделирование физических процессов или обработка большого количества статистических данных, требуют больших вычислительных мощностей. Здесь есть несколько путей решения: кластеры, GRID-системы, облака. Облако фактически представляет собой GRID-систему, архитектура которой скрыта от пользователя. Windows Azure является одной из таких платформ. Платформа Windows Azure состоит из трех компонент:

Windows Azure (Windows для облака) – основной компонент, который обеспечивает вычислительные возможности и возможности хранения данных, платформа для запуска приложений в облаке и хранения данных этих приложений. Azure работает на большом количестве серверов, расположенных в дата-центрах Microsoft и доступных через Интернет.

SQL Azure – реляционная база данных в облаке, которая позволяет хранить структурированные и неструктурированные данные.

Azure AppFabric – осуществляет коммуникацию различных приложений и контроль доступа к ним.

Платформа Azure предполагает следующие сценарии использования:

Веб-приложения и веб-сервисы:

- Масштабируемая инфраструктура

- Пиковые нагрузки

- Временные сайты

- Гибридные приложения

- Композиты

- Автоматизированные агенты

Хранилище данных:

- Хранилище и резервирование

Высокопроизводительные вычисления:

- Параллельные вычисления

- Моделирование и симуляция

- Аналитика

Информационные сервисы и бизнес-процессы:

- Референсные данные

- Общие репозитории

- Управление знаниями

- B2B & электронная коммерция

- Медицина и наука

- Индустриальные сервисы

Традиционно программное обеспечение, реализующее алгоритмы параллельных вычислений, работает на высокопроизводительных кластерах. Однако с развитием облаков необходимость в них уменьшается. Для решения трудных задач всегда можно обратиться к вычислительной мощи облака.

Библиографический список

1. Информация о платформе Windows Azure. – azure.com.
2. Обучение и инструменты (SDK и Azure Training Kit). – azure.com/tools.

**5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НАНОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
И НАНОСТРУКТУР**

**ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА
ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ
ПАРАМЕТРОВ НАНОМАТЕРИАЛОВ**

Е.Е. Гришина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Данная задача используется при определении диэлектрических и магнитных параметров нанокompозитных материалов и сложных наноструктур с различной геометрией. Это является актуальной проблемой нанотехнологии и наноэлектроники. При экспериментальном измерении эти параметры, как правило, труднодоступны, что приводит к необходимости применять методы математического моделирования и находить решение численно с помощью компьютеров.

Рассмотрим волновод с идеально проводящей поверхностью ∂P . Он находится в декартовой системе координат $P = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$. В волноводе расположено объемное тело Q , характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной 3×3 -матрицей-функцией диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\epsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области $\bar{Q}$, $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$. Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая.

Электромагнитное поле в волноводе $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(P)$ возбуждается сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. Источник стороннего поля – электрический ток $\mathbf{j}^0 \in L_{2,loc}(P)$. В работе рассматриваются «слабые» (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом для $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ должны выполняться краевые условия

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu|_{\partial P} = 0. \quad (2)$$

Диагональный тензор функции Грина G_E , компоненты которого являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца, приводился в [1].

В настоящей работе рассматривается изотропный случай, при этом $\hat{\epsilon}(x) = \epsilon$, где ϵ – неизвестная константа (эффективная диэлектрическая проницаемость) образца. Пусть $\pi/a < k_0 < \pi/b$. В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода, потому что $\text{Im } \gamma_1^{(2)} = 0$, $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} > 0$ и $\text{Im } \gamma_p^{(j)} > 0$ для всех p, j , за исключением $p = 1$ и $j = 2$. Мы также предполагаем, что падающее поле имеет вид:

$$\mathbf{E}^0(x) = e_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} x_3},$$

где $A^{(+)}$ – (известная) амплитуда распространяющейся волны.

В [2] получено нелинейное объемное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}^0(x)) &= k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{При этом} \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 = \frac{C}{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}, \quad \text{где} \quad C = \frac{i \pi \omega \mu_0 b \gamma_{10} (Q_1^{(+)} - A^{(+)})}{k_0^2},$$

$$\mathbf{f} = e_2 \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} y_3}, \quad \gamma_{10} = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} - k_0^2}, \quad \text{а скобки обозначают скалярное произведение в пространстве } L_2(Q): (\mathbf{E}, \mathbf{f}) = \int_Q \mathbf{E}(y) \overline{\mathbf{f}(y)} dy.$$

Приближенное решение уравнения (3) может быть найдено посредством итерационного процесса:

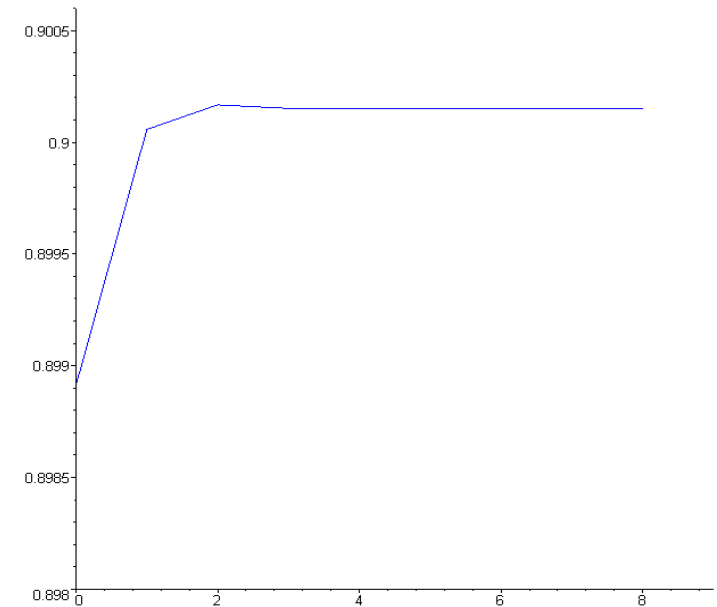
$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n - \frac{1}{\tilde{A}^{(+)} \|\mathbf{f}\|^2} \{ (\mathbf{E}_n, \mathbf{f}) (\mathbf{E}_n - \mathbf{E}^0) - C (A_0 \mathbf{E}_n) \}, \quad (4)$$

который сходится для любого начального приближения $\mathbf{E}_0 \in \overline{S_{\epsilon}(\mathbf{E}^0)}$ со скоростью геометрической прогрессии.

В качестве начального приближения естественно взять $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}^0$.

Аналитическое решение задачи дифракции на секции в волноводе было получено в [3]. Выберем в [3] $\varepsilon = \varepsilon_1$ и возьмем в качестве коэффициента $Q_1^{(+)}$ коэффициент F . Будем вычислять ε итерационным методом.

На рисунке изображены значения ε в зависимости от числа итераций при $\varepsilon_1 = 0,9$.



Библиографический список

1. Смирнов Ю.Г. Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – №3. – С. 2 – 10.
2. Смирнов Ю.Г., Миронов Д.А. О существовании и единственности решений обратной краевой задачи определения диэлектрической проницаемости материалов // ЖВМиМФ. – 2010. – Т. 50, № 9. – С. 1587 – 1597.
3. Смирнов Ю.Г., Медведик М.Ю., Гурина Е.Е. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – №2. – С. 32 – 43.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГЕТЕРОСТРУКТУР НА ОСНОВЕ ПОРИСТОГО ОКСИДА АЛЮМИНИЯ

И.А. Аверин, И.А. Губич, В.Ю. Дарвин, Р.М. Печерская

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Применение моделирования в нанотехнологии позволяет сократить затраты на дорогостоящее оборудование, проведение экспериментов и предоставляет возможность прогнозирования развития различных процессов.

Целью работы является применение математического моделирования для исследования влияния условий формирования пористого оксида алюминия методом электрохимического анодирования, а именно: напряжения, плотности тока, на параметры морфоструктуры, оцениваемые через диаметр пор.

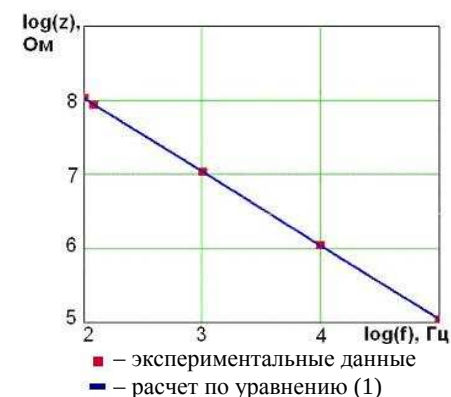
Разработана методика и синтезирован пористый оксид алюминия с регулярной структурой пор, которая анализировалась на атомно-силовом микроскопе. Результаты экспериментов положены в основу предложенной математической модели управления параметрами морфоструктуры для прогнозирования диаметра пор при различных соотношениях напряжения и плотности тока анодирования.

Разработанные математические модели и экспериментальные результаты позволили создать методику и синтезировать газовые наносенсоры на основе пористого оксида алюминия.

Исследование выходных параметров газовых наносенсоров осуществлялось в постоянном и переменном электрических полях. Частотные характеристики наносенсоров исследовались посредством измерителя RLC АКИП-6104 на 5 различных частотах: 100 Гц, 120 Гц, 1 кГц, 10 кГц, 100 кГц.

На рисунке представлена частотная зависимость импеданса сенсоров, где с увеличением частоты наблюдается уменьшение реактивной составляющей импеданса. Это объясняется зависимостью поляризации молекул воды, которые абсорбируются на поверхности оксида алюминия и имеют дипольную структуру, от периода протекания переменного тока. Если время, в течение которого электрическое поле направлено в одну сторону ($T/2$), больше времени релаксации τ , поляризация достигает своего наибольшего значения и не будет изменяться с частотой. Если же при увеличении частоты полупериод $T/2$ переменного тока становится меньше времени релаксации, то поляризация не успевает достигнуть своего мак-

симального значения, что приводит к уменьшению диэлектрической проницаемости и импеданса сенсоров с увеличением частоты.



Зависимость изменения импеданса от частоты сигнала

Обработка экспериментальных результатов методом наименьших квадратов позволила представить частотную зависимость импеданса мультисенсора в виде:

$$\log z = \log b + \log af,$$

где $a = -0,994$; $b = 10,017$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НУКЛЕОФИЛЬНОГО РОСТА ФРАКТАЛЬНЫХ НАНОСИСТЕМ

И.А. Аверин, И.А. Пронин, Р.М. Печерская

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Принцип действия газовых сенсоров на основе наноструктурированных материалов основан на адсорбции газа-реагента на поверхности перколяционных ветвей полупроводника с последующим изменением эффективной проводящей площади горловины цепочек [1]. Основной метод диагностики наноструктурированных плёнок – это атомно-силовая микроскопия. Однако она обладает существенным недостатком – все поры плёнки размерами менее 10 нм лежат вне её чувствительности. Обнаружено, что значения площади поверхности композитов по результатам обработки атомно-силовых изображений в 100-1000 раз меньше величины площади,

вычисленной по данным метода тепловой десорбции [2]. Однако такие поры вносят основной вклад в явление газочувствительности, причем становится актуальным использование теоретических моделей как для оценки пористости газочувствительных плёнок, так и для определения размеров объектов, являющихся продуктами золь-гель-синтеза.

Цель работы – разработка моделей сборки агрегатов при коагуляции коллоидных растворов полимеров.

Для этого используется уравнение быстрой коагуляции Смолуховского, решение которого в предположении, что $n = \frac{c_0}{c}$ – среднее число мономеров в составе полимера, является линейной функцией времени:

$$n(\tau) = 1 + kc_0\tau, \quad (1)$$

где $k = \frac{4k_B T}{3\eta} \zeta$; k_B – постоянная Больцмана; T – температура коагуляции;

η – вязкость раствора; ζ – эффективная вероятность соударения; c_0 – начальная концентрация полимера в золе.

Получаемый полимер образуется в результате хаотического соударения частиц-мономеров, обусловленного броуновским движением. Известно, что траектория броуновской частицы – фрактал с размерностью $D = 2$. Разумно предположить, что собираемый полимер также представляет собой фрактально организованный агрегат. Один из примеров таких образований – кластер Виттена-Сендера. Ввиду сложности математического описания таких объектов предположим, что продукт коагуляции системы представляет собой фрактал Жульена, довольно хорошо аппроксимирующий истинные продукты сборки. Диаметр фрактала Жульена в зависимости от числа звеньев n в нём определяется:

$$d = \alpha 3^{\frac{\ln n}{\ln 13}}, \quad (2)$$

где α – диаметр одного звена.

Объёмная плотность данного фрактала равна:

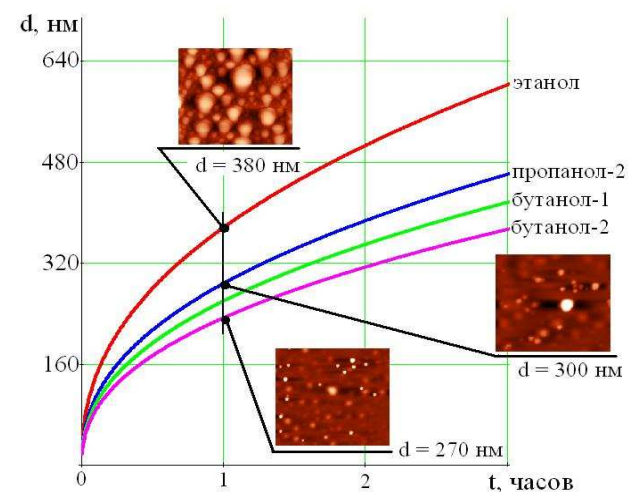
$$\rho = \frac{3\alpha^{-D}}{4\pi} \left(\frac{d}{2} \right)^{D-3}. \quad (3)$$

Тогда с учётом (1) выражение для диаметра агрегата, полученного при нуклеофильном росте, имеет вид:

$$d(\tau, T) = \alpha \gamma 3^{\frac{\ln(1+kc_0\tau)}{\ln 13}}, \quad (4)$$

где γ – коэффициент, учитывающий переход из массового 3D фрактала в поверхностный 2D, в первом приближении равный 1 (нет «схлопывания» агрегатов). Используя данное соотношения, можно найти как объёмную плотность агрегата (3), так и его пористость.

Для подтверждения полученных моделей проведены эксперименты, на основе результатов которых определены размеры кластеров, полученных при различных условиях синтеза (рисунок).



Зависимость диаметра агрегата от вязкости спирта

При эмпирическом определении общего для растворов параметра эффективной вероятности соударения, равной $\xi \sim 2 \cdot 10^{-9}$, погрешность определения размеров составляет не более 20%.

Полученные результаты хорошо согласуются при нуклеофильном росте кластеров, когда система находится в области метастабильных фаз – между линиями спинодали и бинодали. Для применения золь-гель-технологии при создании газочувствительных элементов необходимо использовать область лабильных фаз, результатом распада системы в которой является перколяционная сетка полимера. Результаты исследования атомно-силовой микроскопии показывают, что ветви не являются сплошными, а иерархически организованы, причем средний диаметр ветви можно определить по уравнению (4).

Таким образом, полученные теоретические модели позволяют спрогнозировать основные параметры тонких плёнок, полученных с помощью золь-гель-технологии: пористость, диаметр нуклеофильных кластеров, размеры перколяционных ветвей. Следует отметить, что разработанные модели могут быть использованы для определения размеров пор менее 10 нм, где стандартные методы АСМ-диагностики неприменимы.

Библиографический список

1. Давыдов С.Ю., Мошников В.А., Томаев В.В. Адсорбционные явления в поликристаллических полупроводниковых сенсорах: учеб. пособие. – СПб.: СПбГЭТУ, 1998. – 56 с.
2. Мошников В.А., Грачева И.Е. Сетчатые газочувствительные наноконпозиты на основе диоксидов олова и кремния / Приложение к журналу «Вестник РГРТУ». – Рязань, 2009. – № 4.

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБРАЗОВАНИЯ

Н.Ф. Добрынина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В статье рассмотрен критерий устойчивости решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которыми описываются математические модели в образовании. Полученные результаты относятся к разделу исследований социальной синергетики.

Исследованию устойчивости решений математических моделей экономики, экологии и демографии посвящен ряд работ. В них рассматривается устойчивость по Ляпунову [1]. В большинстве публикаций по исследованию устойчивости математических моделей проводится линеаризация и, кроме того, требуется, чтобы коэффициенты и правые части соответствующих уравнений были заданы в аналитической форме.

В цикле работ И.В. Бойкова [2-5] предложены критерии устойчивости решений дифференциальных уравнений, основанные на исследовании норм семейства специальным образом построенных линейных операторов.

Исследование устойчивости производится в произвольных банаховых пространствах и пространствах R_n, E_n . Используются следующие обозначения:

$$R(a, r) = \{x \in R_n : \|x - a\| \leq r\}; \quad S(a, r) = \{x \in R_n : \|x - a\| = r\};$$

$$\operatorname{Re} K = K_R = \frac{(K + K^*)}{2}; \quad \Lambda(K) = \lim_{h \rightarrow 0} (\|I - hK\| - 1)h^{-1}.$$

$\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора K .

Математическая модель образования построена автором в предыдущих статьях. В ее основе лежит модель Вольтера-Лотки «хищник – жертва», расширенная на три группы индивидуумов.

Рассмотрим группу студентов, разделенную по успеваемости на три подгруппы. N_i – число студентов в подгруппе ($i = 1, 2, 3$). Если студенты не перемещаются из одной подгруппы в другую, то изменение в подгруппе пропорционально коэффициентам $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Получается следующая система уравнений:

$$\frac{dN_i}{dt} = \varepsilon_i N_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Введем коэффициенты прироста или уменьшения количества студентов в подгруппе за счет студентов других подгрупп:

$$\gamma_1(N_2 + N_3), \quad \gamma_2(N_1 + N_3), \quad \gamma_3(N_1 + N_2).$$

Получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 + \gamma_1(N_2 + N_3)), \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(\varepsilon_2 + \gamma_2(N_1 + N_3)), \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3(\varepsilon_3 + \gamma_3(N_1 + N_2)). \end{cases} \quad (1)$$

При этом $N_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$.

Рассмотрим эту задачу как задачу Коши в банаховом пространстве B .

$$\frac{dN}{dt} = A(t, N(t)), \quad A(t, 0) = 0, \quad (2)$$

$$N(0) = N_0, \quad N_0 \in B, \quad (3)$$

где $N = (N_1, N_2, N_3)$; A – матрица системы (1).

Пусть задача Коши (2) – (3) разрешима при всех $t \geq 0$. Применяя теорему (1.1), доказанную И.В.Бойковым в статье [5], получим следующее утверждение.

Теорема. Предположим, что в некотором шаре $R(0, \delta)$, $\delta > 0$, B -пространства выполнено условие: для любого $T > 0$ и любого $z \in R(0, \delta)$, $z \neq 0$ найдется такой линейный оператор $L(T, z)N$, что

$$1) \quad \text{логарифмическая норма оператора } \Lambda(L(T, z)) < 0, \\ (\Lambda(L(T, z)) \leq -a, a > 0);$$

2) для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существуют такая окрестность $\delta_i(\varepsilon)$ и такое значение $\Delta T(\varepsilon)$ (для каждой точки z свое), что при $\|x(t) - z\| < \delta_i$ и $t \in [T, T + \Delta T]$ справедливо неравенство

$$\|A(t, N(t)) - L(T, z)N(t)\| \leq \varepsilon \|N(t)\|.$$

Тогда тривиальное решение системы уравнений (1) устойчиво.

Доказательство. Доказательство проводится от противного. Пусть в момент времени T_0 траектория $N(t)$ решения задачи Коши (2) – (3) покидает сферу $S(0, \delta)$ ($\|N_0\| < \delta$), проходя через точку $z \in B$. По условиям теоремы найдется линейный оператор $L(T_0, z)$, удовлетворяющий условиям (1, 2) теоремы.

Представим систему уравнений (2) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = L_1(T_0, z)N_1 + F_1(N_1, N_2, N_3), \\ \frac{dN_2}{dt} = L_2(T_0, z)N_2 + F_2(N_1, N_2, N_3), \\ \frac{dN_3}{dt} = L_3(T_0, z)N_3 + F_3(N_1, N_2, N_3), \end{cases} \quad (4)$$

где $A(t, N(t)) - L(T_0, z)N$.

Поскольку $z \neq 0$, то из условия 2 теоремы следует, что найдется такой интервал времени ΔT^* , что при $t \in [T_0, T_1]$, $T_1 = T_0 + \Delta T^*$:

$$\|F(N)\| \leq \varepsilon \|N(t)\|, \quad (5)$$

где $\varepsilon < a(T_0) = \Lambda(L(T_0, z))$.

Решение системы (3) при $t \geq T$ можно представить в виде:

$$\begin{cases} N_1(t) = e^{L_1(T_0, z)(t-T_0)} N_1(T_0) + \int_{T_0}^t e^{L_1(T_0, z)(t-\tau)} F_1(\tau) d\tau, \\ N_2(t) = e^{L_2(T_0, z)(t-T_0)} N_2(T_0) + \int_{T_0}^t e^{L_2(T_0, z)(t-\tau)} F_2(\tau) d\tau, \\ N_3(t) = e^{L_3(T_0, z)(t-T_0)} N_3(T_0) + \int_{T_0}^t e^{L_3(T_0, z)(t-\tau)} F_3(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (6)$$

Перейдем в формулах (6) к нормам, учитывая неравенство (5), в интервале времени $[T_0, T_1]$ приходим к системе неравенств:

$$\begin{aligned} \|N_i(t)\| &\leq e^{\lambda L_i(T_0, z)(t-T_0)} \|N(T_0)\| + \varepsilon \int_{T_0}^t e^{\lambda L_i(T_0, z)(t-\tau)} \|N_i(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq e^{-\alpha(T_0)(t-T_0)} \|N(T_0)\| + \varepsilon \int_{T_0}^t e^{-\alpha(T_0)(t-\tau)} \|N_i(\tau)\| d\tau, \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (7)$$

Умножим обе части системы неравенств (7) на $e^{-\alpha(T_0)t}$, придем к неравенству

$$0 \leq \psi_i(t) \leq e^{\alpha T_0} \|N_i(T_0)\| + \varepsilon \int_{T_0}^t \psi_i(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где $\psi_i(t) = e^{\alpha_i(T_0)t} \|N_i(t)\|$.

Применяя к формуле (8) неравенство Гронуолла-Беллмана, в интервале времени $[T_0, T_1]$ имеем:

$$\|N_i(t)\| \leq e^{-(\alpha(T_0)-\varepsilon)(t-T_0)} \|N_i(T_0)\|. \quad (9)$$

Следовательно, траектория $N_i(t)$ не покидает сферы $S(0, \delta)$, и устойчивость системы доказана.

Докажем асимптотическую устойчивость. Пусть $0 < \varepsilon < \alpha/2$. Построим последовательность точек $T_0, T_1, \dots, T_n$, такую, что

$$\|N(T_{r+1})\| \leq e^{-(\alpha-\varepsilon)(T_{k+1}-T_k)} \|N(T_k)\| \leq e^{-(\alpha-\varepsilon)(T_{r+1}-T_0)} \|N(T_0)\|. \quad (10)$$

Имеются две возможности:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T^*$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$.

Нас интересует только первый случай, поскольку время обучения в вузе ограничено. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, имеем:

$$\|N_i(T^*)\| \leq e^{-\alpha(T^*-T_0)/2} \|N_i(T_0)\|. \quad (11)$$

В этом случае возможны ещё два варианта:

- 1) $\|N_i(T^*)\| = 0$;
- 2) $\|N_i(T^*)\| \neq 0$.

В первом случае теорема доказана.

Во втором случае, взяв $\|N_i(T^*)\|$ в качестве начального приближения и повторяя проведенные выше рассуждения, убеждаемся, что существует интервал времени $[T^*, T_1]$, в котором неравенство (11) справедливо. Пусть T_1^* – момент времени, такой, что при $t > T_1^*$ неравенство (11) нарушается. Тогда, если $\|N_i(T_1^*)\| = 0$, то взяв T_1^* за начальное приближение и проводя приведённые рассуждения, приходим к противоречию. Таким образом, неравенство (11) доказано при всех $t \geq T_0$, и теорема доказана.

Библиографический список

1. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
2. Бойков И.В. // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 314, № 6. – С. 1298 – 1300.
3. Бойков И.В. // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, № 3. – С. 398 – 402.
4. Бойков И.В. // Автоматика и телемеханика. – 2001. – №1. – С. 40 – 49.
5. Бойков И.В. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2003. – № 2. – С. 18 – 30.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАНОСТРУКТУР: ТЕОРЕМА О МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЕ

М.В. Астафурова¹, В.И. Астафуров²

¹ Гимназия 1542,
г. Москва,

² ЗАО «Радиационные и экологические исследования»,
г. Москва, Россия

Аксиоматика математики вырастает вместе с самим предметом математики из реальности окружающего мира. То, что мы считаем самоочевидным, аксиомой, в действительности представляет собой абстрактное изложение человеческого опыта. Задача учёных, занимающихся основами какой-либо науки, – приблизить аксиоматику к реальности окружающего мира. Если в системе исходных аксиом содержатся ложные утверждения или отсутствуют утверждения, отражающие важные свойства окружающего мира, то научное здание, построенное на таком фундаменте, обязательно будет иметь дефекты. И напротив, чем правильнее аксиоматика будет отображать свойства окружающего мира, тем правильнее будут и полученные на основе такой аксиоматики научные результаты и выводы.

Можно ли утверждать, что аксиоматика современной математики полностью построена и представляет собой совершенную конструкцию? Если исходить из теоремы о неполноте Гёделя, то построение идеальной аксиоматической конструкции невозможно в принципе. Но есть и другие показатели, говорящие о наличии противоречий в аксиоматике современной математики. Приведём в подтверждение следующие два примера.

Пример первый. Очевидно, что всякий отрезок имеет определённую конечную длину. Всякая конечная длина, в принципе, должна описываться числом, имеющим конечное значение. Однако, согласно теореме Пифагора, длина отрезка может выражаться числом, не имеющим конечного значения. Каков физический смысл такого математического описания длины, и как это согласуется с физической реальностью?

Пример второй. В математическом анализе важным является представление о бесконечно малой величине. Но что такое бесконечно малая величина? Это не ноль. И это не величина конечного значения. Имеет ли эта математическая абстракция какое-либо отношение к реальному миру? Или она нужна только для того, чтобы иметь возможность описывать непрерывность? Но является ли непрерывность свойством физического мира?

Цель настоящей работы заключается в поиске аксиом, которые бы приблизили математику к описанию физического мира, в частности, в области наноструктур.

1. Решение поставленной задачи

1.1 Введём исходные постулаты, отражающие фундаментальные свойства физического мира [1].

Постулат 1 (П1). Физический мир не содержит пустоты. Любая часть физического мира заполнена той или иной физической сущностью.

Постулат 2 (П2). Движение – неотъемлемое свойство физического мира.

Постулат 3 (П3). Протяжённость (пространство) – неотъемлемое свойство физического мира.

Следствие из П3. Всякий физический объект имеет пространственный размер.

1.2 Введём аксиомы о свойствах физического объекта [1].

Аксиома А1. Протяжённость физического объекта конечна.

Частное следствие из А1. Всякий физический отрезок имеет конечный размер.

Аксиома А2. Всякое свойство физического объекта в количественном выражении должно выражаться числом конечного значения.

Аксиома А2 не является самоочевидной. Поэтому представим ее обоснование. Числовое значение, которые мы приписываем какому-либо свойству физического объекта, всегда является относительным. Измерение свойства физического объекта заключается в регистрации показаний измерительного прибора. Измерение является процессом, при котором сравнивают показания прибора при измерении исследуемого объекта и объекта, принимаемого за эталон. Показание любого прибора всегда является числом конечного значения. Следовательно, результат измерения любого свойства представляет собой число конечного значения. Приходим к выводу, что всякое свойство физического объекта может быть выражено количественно числом конечного значения.

Частное следствие из А2. Длина всякого физического отрезка должна выражаться числом конечного значения.

1.3 Теорема о минимальной длине

Представленные выше постулаты, аксиомы и следствия позволяют выдвинуть следующее утверждение, которое будем считать теоремой, требующей доказательства.

Теорема. В физическом мире существует минимальная длина.

Доказательство

Протяжённость является свойством физического мира (*ПЗ*). Протяжённость физического объекта конечна (*А1*). Длина – одно из проявлений протяженности, следовательно, всякая физическая длина имеет конечный размер.

Физический мир не содержит пустоты (*П1*). Следовательно, протяжённость как свойство физического мира не может быть равна нулю. Длина – одно из проявлений протяженности, следовательно, она также не может быть равна нулю.

Таким образом, мы показали, что всякая физическая длина имеет конечный размер, отличный от нуля. Наименьшее значение физической длины является минимальной длиной.

Теорема доказана.

1.4 Экспериментальная проверка истинности теоремы о минимальной длине

Применим для проверки истинности теоремы о минимальной длине метод экстраполяции числовых значений.

Поскольку все объекты физического мира в той или иной степени взаимосвязаны, то все однородные величины, характеризующие свойства физических объектов, должны быть взаимосвязаны между собой определенными соотношениями.

Известно, что в физическом мире существуют четыре фундаментальных взаимодействия: ядерное, электромагнитное, слабое и гравитационное. Ядерное взаимодействие регулирует процессы внутри атомного ядра, электромагнитное – процессы образования атомов и молекул, гравитационное – процессы образования галактик и всей Вселенной. Роль слабого взаимодействия неоднозначна, и мы не будем его рассматривать.

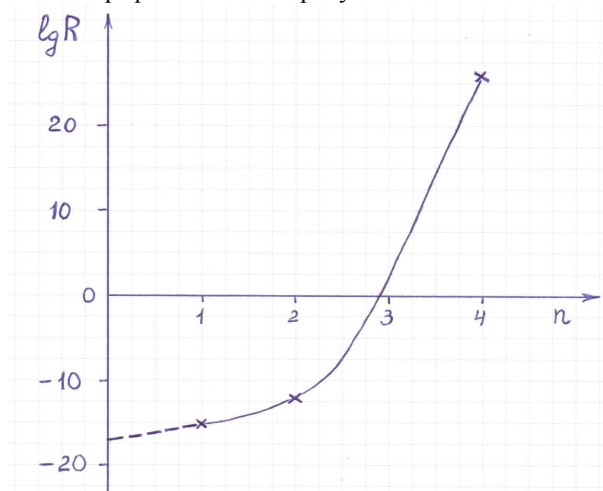
Сравним размеры физических объектов, имеющих отношение к указанным фундаментальным взаимодействиям. Для каждого вида взаимодействия выберем по одному наиболее представительному объекту. Для атомного ядра таким объектом будет протон. Экспериментальное значение радиуса протона равно $8,15 \cdot 10^{-16}$ м [2]. В атомах и молекулах главным строительным кирпичиком является электрон. Для размера электрона в справочниках указаны две величины: комптоновская длина волны электрона – $2,4 \cdot 10^{-12}$ м и классический радиус электрона – $2,8 \cdot 10^{-15}$ м. Произвольно выберем большее значение – $2,4 \cdot 10^{-12}$ м. Объектом, представляющим мир гравитации, будет для нас Вселенная. Радиус Вселенной составляет $\sim 10^{26}$ м [3, с.15].

Пронумеруем фундаментальные взаимодействия: ядерное – $n=1$, электромагнитное – $n=2$, слабое – $n=3$, гравитационное – $n=4$. Поставим каждому выбранному физическому объекту в соответствие тот номер, ка-

кому фундаментальному взаимодействию этот объект соответствует: протон – $n=1$, электрон – $n=2$, Вселенная – $n=4$.

Построим график. По оси абсцисс отложим номер (n) физического объекта, а по оси ординат – размер объекта (R). Но поскольку численные значения размеров сильно отличаются, то мы отложим по оси ординат значения десятичных логарифмов ($\lg R$). Для упрощения расчетов возьмём приближённые значения размеров: $\sim 10^{-15}$ м, $\sim 10^{-12}$ м, $\sim 10^{26}$ м. После логарифмирования получаем следующие численные значения: -15 , -12 , 26 .

Полученный график показан на рисунке.



Размеры фундаментальных физических объектов

Экспериментальные точки можно соединить кривой, которая после экстраполяции к значению $n=0$ пересекает ось ординат в точке приблизительно -17 . Полученный результат показывает, что в физическом мире существует некоторый наименьший объект, имеющий размер приблизительно $\sim 10^{-17}$ м. Этот объект нам неизвестен, но мы можем утверждать, что он существует. Размер данного объекта и является той минимальной длиной, которая может существовать в физическом мире. Если бы такой длины не существовало, то наша кривая имела бы другой вид. При устремлении её к значению $n=0$ кривая должна была бы постепенно приближаться к оси ординат, уходя в бесконечную отрицательную область значений $\lg R$, не пересекая оси ординат.

Таким образом, мы получили экспериментальное подтверждение существования в физическом мире минимальной длины.

2. Обсуждение результатов

2.1 О соизмеримости отрезков

Мы получили результаты, которые говорят о том, что в физическом мире все однородные свойства физических объектов соизмеримы. В том числе соизмеримой является и длина отрезков. Но этот вывод вступает в противоречие с результатами, полученными на основе теоремы Пифагора. Расчет длины диагонали квадрата, выполненный в соответствии с теоремой Пифагора, приводит к выводу о существовании несоизмеримости длины отрезков.

Проанализируем данную ситуацию.

Рассмотрим случай, когда катеты прямоугольного треугольника представляют собой отрезки минимальной длины R_{min} . В этом случае длина гипотенузы, согласно теореме Пифагора, должна быть равна $\sqrt{2R_{min}^2}$, то есть не целому числу отрезков минимальной длины. А это невозможно. В физическом мире прямоугольный треугольник с катетами минимальной длины не может существовать в принципе. Вследствие движения такой треугольник примет форму равностороннего треугольника, где каждая сторона будет равна отрезку минимальной длины.

Рассмотрим случай, когда катеты прямоугольного треугольника являются отрезками единичной длины, где за единичную длину мы условно принимаем некоторое небольшое число отрезков минимальной длины, например, десять таких отрезков. В этом случае, согласно теореме Пифагора, длина гипотенузы должна быть равна $\sqrt{200R_{min}^2} \approx 14,14R_{min}$. Однако минимальная длина не может быть разделена на части. Поэтому в физическом мире данный треугольник вследствие движения изменит свою форму таким образом, чтобы в диагонали укладывалось целое число отрезков минимальной длины, например, 14. И наш треугольник уже не будет точно прямоугольным.

Приходим к выводу, что в физическом мире область применения теоремы Пифагора ограничена. Эта теорема действительна при условии, что длина L_i каждой из сторон треугольника намного больше минимальной длины ($L_i \gg R_{min}$), и величиной R_{min} по сравнению с длиной сторон треугольника можно пренебречь.

2.2 О непрерывности и дискретности движения

Если в физическом мире существует минимальная длина, то мы должны сделать вывод о том, что всякое движение является дискретным. Видимая непрерывность какого-либо вида движения является кажущейся. Всякая непрерывность является суммой прерывистых движений.

Выводы

Предложено ввести в аксиоматику современной математики постулаты и аксиомы, учитывающие свойства физического мира. Доказана и подтверждена экспериментальными данными теорема о существовании минимальной длины. Показано, что в физическом мире область применения теоремы Пифагора ограничена. Полученные результаты могут быть использованы при математическом моделировании наноструктур.

Библиографический список

1. Астафурова М.В. Физическая аксиоматика математики: первые постулаты, аксиомы и следствия / М.В. Астафурова, В.И. Астафуров / II Международная науч.-практ. конф. молодых учёных (18 апреля 2011 г.): сб. науч. трудов. – Таганрог: Изд-во ЦНМ, 2011 (в печати).
2. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. – Т. 2. Физика элементарных частиц. – 4-е изд. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 376 с.
3. Архангельская И.В. Космология и физический вакуум / И.В. Архангельская, И.Л. Розенталь, А.Д. Чернин. – М.: КомКнига, 2006. – 216 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАНОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Н.В. Мойко, Н.В. Печникова, Т.В. Черушева

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Основная особенность подготовки студентов по направлению 210600 «Нанотехнология» в Пензенском государственном университете – сочетание фундаментальной естественнонаучной и современной инженерной подготовки. В настоящий момент обществу необходим специалист, способный реагировать на быстрые изменения в соответствующей профессиональной сфере. Особое значение приобретает наличие у бакалавров и магистров фундаментального образования, на основании которого можно путем самообразования не отставать от новых достижений науки и техники. К ним предъявляются высокие требования. Это и качественное техническое образование, и нестандартное мышление, и отличное владение специальными компьютерными программами, и знание английского языка.

Специфика инженерного образования состоит в том, что в процессе обучения студенты должны осваивать большой объем дисциплин общеобразовательного и прикладного характера, связанных с их будущей специальностью. На практике в процессе обучения преподаватели сталкиваются с невысокой мотивацией при изучении общеобразовательных дисциплин,

которые, по мнению студентов, не являются необходимыми в их дальнейшей профессиональной деятельности. Это, в первую очередь, относится к математике.

Обучаясь в вузе, многие студенты не в состоянии оценить, что курс «Математика» в системе их профессиональной подготовки выполняет две основополагающие функции: знания по математике являются фундаментом для изучения других общеобразовательных, инженерных и специальных дисциплин; для большинства специальностей технических вузов математика, не являясь профилирующим предметом, является инструментом для изучения специальных дисциплин инженерного цикла.

Поскольку математика является важнейшей частью профессиональной подготовки будущего инженера, то преподаватели математики должны знать содержание общепрофессиональных и специальных дисциплин, чтобы понять, в каких математических знаниях особенно остро нуждаются специалисты данной отрасли высшего технического образования. Это поможет сблизить преподавание математики с требованиями практики, улучшить систему математической и, как следствие, профессиональной подготовки, а также наполнить курсы такими примерами и задачами, которые будут наиболее близки и интересны студентам как будущим специалистам.

Мы считаем, что наиболее перспективным с позиции обеспечения адекватной траектории профессионального становления будущего инженера является рассмотрение в курсе математики комплекса прикладных и профессионально-ориентированных задач, которые устанавливают связи со специальными дисциплинами, а также иллюстрируют эффективность математических методов. В этом, в частности, заключается основа для понимания единства математики, повышения качества освоения ее содержания будущими инженерами, развития мотивации и интереса к овладению будущей профессией, потребности в инженерно-ориентированных математических знаниях и методах. Для разрешения указанных проблем в процессе обучения математике мы сочетаем изучение традиционных теоретических вопросов с использованием современных электронных средств поддержки Mathcad, Mathematika, Maple, Matlab и соответствующих учебных материалов.

Мы предлагаем сочетать усиленную математическую подготовку и спецдисциплины по микроэлектронике и нанотехнологиям. Так, бакалаврам можно читать общематематические курсы и курсы, включающие знание языков программирования. К примеру, программа общей математики может содержать такие разделы, как аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; дифференциальное и интегральное

исчисления; векторный анализ и элементы теории поля; гармонический анализ; дифференциальные уравнения, содержащие теорию возмущений и устойчивости Ляпунова; методы получения приближенных решений; численные методы; основы вычислительного эксперимента; функции комплексного переменного; обобщенные функции и действия над ними; элементы функционального и тензорного анализа; вероятность и статистика: теория вероятностей, случайные процессы и поля, статистическое оценивание и проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных; вариационное исчисление и оптимальное управление. При изучении математики нанотехнологам следует уделить особое внимание вопросам геометрии. Например, в методе молекулярной динамики [1] (метод МД – метод, в котором временная эволюция системы взаимодействующих частиц отслеживается интегрированием их уравнений движения) для описания движения атомов или частиц применяется классическая механика. В этом случае силы межатомного взаимодействия можно представить в форме классических потенциальных сил (как градиент потенциальной энергии системы). Здесь понятия скалярного, векторного произведения векторов, компланарности используются в геометрии векторов связей в моделях капсомеров, например, в моделях, содержащих три внутренних вектора связывания. Векторы связывания изображены на рис. 1.

В модели B_3 с первичной комплементарной парой $(1, 2)$, имеется вторичная комплементарная пара $(3, 3)$. Это означает, что благоприятное взаимодействие, вызванное первичной комплементарной парой $(1, 2)$, также требует, чтобы векторы b_i^3 и b_j^3 были почти компланарны.

$$\cos(\theta_{ij}^{(\alpha\beta)}) = \frac{-b_i^{(\alpha)} \cdot b_j^{(\beta)}}{b^2}, \quad R_{ij} = R_i - R_j;$$

$$\cos(\phi_{ij}^{(\alpha\beta,1)}) = \frac{(b_i^{(\gamma)} \times R_{ij}) \cdot (R_{ij} \times b_j^{(\epsilon)})}{|b_i^{(\gamma)} \times R_{ij}| |R_{ij} \times b_j^{(\epsilon)}|},$$

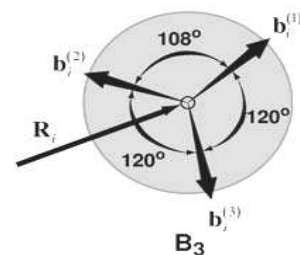


Рис. 1. Геометрия векторов связей в модели капсомеров B_3 .

R_i является центром капсомера i .

Углы между векторами связей указаны в градусах

$$\cos\left(\phi_{ij}^{(\alpha\beta,2)}\right)=\frac{\left(b_i^{(\eta)}\times R_{ij}\right)\cdot\left(R_{ij}\times b_j^{(\nu)}\right)}{\left|b_i^{(\eta)}\times R_{ij}\right|\left|R_{ij}\times b_j^{(\nu)}\right|}.$$

Зависимость взаимодействий субъединица – субъединица от ориентации первичных и вторичных пар включает то, что существует сила, выравнивающая комплементарные области в субъединицах, чтобы максимизировать контакт между комплементарными остатками. Кривизна капсида при ориентации с минимумом потенциальной энергии вытекает из того, что углы между векторами связывания для заданной субъединицы не равны в сумме 2π .

Одним из актуальных вопросов современной электроники является создание устройств, работающих в миллиметровом и оптическом диапазоне, на основе одномерных и двумерных квазипериодических структур – фотонных кристаллов [2].

При падении электромагнитной волны на 1D-периодическую структуру с нелинейной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(E)$ наблюдается целый спектр физических явлений, на основе которых возможно построение таких функциональных устройств, как заграждающие фильтры, ограничители мощности, фотонные световоды и т.п.

При этом прохождение электромагнитной волны в стационарном случае описывается уравнением (1):

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon(E(z)) E(z) = 0, \quad (1)$$

где $\{E, \varepsilon\} \in C$ – комплексные функции пространственной координаты z ; k_0 – волновое число.

Для аналитического решения уравнения в линейном случае ($\varepsilon^{(2)} = 0$) записываются выражения для полей в областях I, II и III (рис. 2) и сшиваются на границах, в результате чего приходим к системе (2):

$$\begin{cases} E_I(0) = A(1+R) = E_{II}(0) = A^+ + A^-; \\ E_{II}(d) = A^+ e^{-jk_d} + A^- e^{jk_d} = E_{III}(d) = A T e^{-jk_0 d}; \\ E'_I(0) = -jk_0 A(1-R) = -jk(A^+ - A^-); \\ E'_{II}(d) = -jk(A^+ e^{-jk_d} - A^- e^{jk_d}) = -jk_0 A T e^{-jk_0 d}. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} E_I(z) = A(e^{-jk_0 z} + R e^{jk_0 z}), & z \leq 0; \\ E_{II}(z) = A^+ e^{-jkz} + A^- e^{jkz}, & 0 < z \leq d; \\ E_{III}(z) = T e^{-jk_0 z}, & z > d. \end{cases}$$

с условиями

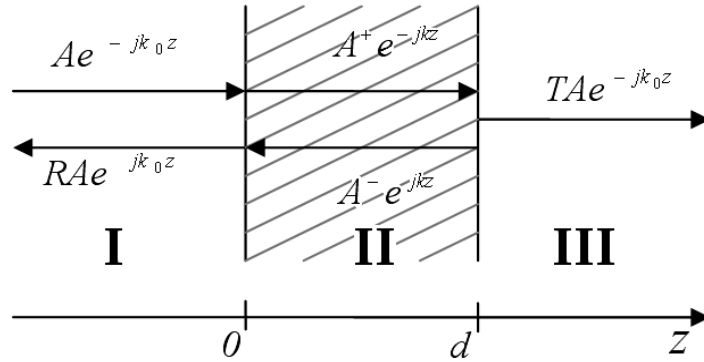


Рис. 2. Пространственное распределение волн в диэлектрическом слое

При этом распределение поля в области $[0, d]$ описывается уравнением:

$$E = E_{II}(z) = A^+ e^{-jkz} + A^- e^{jkz}, \quad (3)$$

где $A^+ = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{k_0}{k}\right) e^{-j(k_0 - k)d}$ – амплитуда прямой волны в области $[0, d]$;

$A^- = \frac{C}{2} \left(1 - \frac{k_0}{k}\right) e^{-j(k_0 + k)d}$ – амплитуда обратной волны в области $[0, d]$;

$C = E(d)$ – амплитуда вышедшей волны.

Для нахождения численного решения уравнение (1) записывают в виде “state-space” модели, удобной для дальнейшей работы.

$$\begin{cases} \frac{dE(z)}{dz} = X(z); \\ \frac{dX(z)}{dz} = -k_0^2 \mathcal{E}(E(z)) E(z). \end{cases} \quad (4)$$

Для решения данной задачи используются вычислительные алгоритмы, описанные в [3]. Задача может быть решена двумя методами: в обратном ходе, когда граничные условия задаются на выходе исследуемой структуры, и в прямом ходе, когда граничные условия в начале системы определяются путём минимизации невязки граничных условий на выходе (самосогласованная задача).

При этом требуется знание амплитуды поля и её производной на левой границе. Найти решение возможно лишь одним из методов пристрелки путём минимизации невязки граничных условий на правой границе:

$$\left| E(l) + jk_0 \frac{dE(z)}{dz} \right|_{z=l} \rightarrow \min, \text{ используя многомерную оптимизацию по четырём параметрам } \left(\operatorname{Re} al[E(0)], \operatorname{Im} age[E(0)], \operatorname{Re} al \left[\frac{dE(z)}{dz} \right]_{z=0}, \operatorname{Im} age \left[\frac{dE(z)}{dz} \right]_{z=0} \right),$$

которая может быть сведена к оптимизации по двум параметрам $(\operatorname{Re} al(R), \operatorname{Im} age(R))$ путём тривиальных математических преобразований.

Библиографический список

1. Кретов В.Н. Поточные формальные системы в моделях самосборки субмолекулярных структур // Труды 1-й Всероссийской школы-семинара студентов, аспирантов и молодых ученых «Функциональные наноматериалы для космической техники», 1-3 декабря 2010 г. – М.: Изд-во МГИЭИМ. – С. 52 – 59.
2. Доронин Д.М. Туннелирование плоской электромагнитной волны через квазипериодические метаматериалы // Труды 1-й Всероссийской школы-семинара студентов, аспирантов и молодых ученых «Функциональные наноматериалы для космической техники», 1-3 декабря 2010 г. – М.: Изд-во МГИЭИМ. – С. 39 – 43.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ, 2004. – 636 с.
4. Мойко Н.В. Преподавание высшей математики при подготовке специалистов индустрии микро- и наносистем // II науч.-техн. конференция «Методы создания, исследования микро-, наносистем и экономические аспекты микро-, нанoeлектроники». – Пенза: Изд-во ПГУ, 2009. – С. 32 – 34.
5. Печникова Н.В., Гаврилова М.А., Яремко Н.Н. Совершенствование математической подготовки студентов классического университета // Ак-

туальные вопросы методики преподавания математики и информатики: сборник научных трудов 4-й Международной науч.-практ. конференции. – Биробиджан: Изд-во ДВГСГА, 2009. – С. 98 – 104.

6. Мойко Н.В., Печникова Н.В., Черушева Т.В. Математика и межпредметные связи при подготовке бакалавров индустрии микро- и наносистем // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы: материалы Всероссийской науч.-практ. конференции. – Пенза: ПГПУ, 2011. – С. 132 – 138.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....3

[И.В. Бойков, Т.В. Елисеева](#)
[РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ](#)
[ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА](#)
[В ОБЛАСТИ С ФРАКТАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ.....3](#)

[Г.Е. Хурсевич, Е.Г. Климец](#)
[ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ](#)
[ВТОРОГО ПОРЯДКА](#)
[С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ.....6](#)

[И.В. Бойков, Г.И. Гринченков](#)
[УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОЛОГИИ... 9](#)

А.Н. Тында, А.Ю. Василькин
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ.....17

А. Н. Тында, Е. Д. Печникова
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНА,
ПРИМЕНЯЕМЫХ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....22

И. В. Бойков, В. А. Рязанцев
[ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГИДРОДИНАМИКИ.....25](#)

И.В. Бойков, Ю.Ф. Захарова, А.А. Дмитриева, О.А. Будникова
УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ИММУНОЛОГИИ.....30

Н.Ф. Добрынина, А.И. Шляпошникова
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.....44

Ф.В. Лубышев, А.Р. Манапова АЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	49
Н.Ю. Кудряшова , И.С. Петров ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ЗАМКНУТЫХ КОНТУРАХ.....	51
Е.В. Пастухова ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА.....	55
Н.Ю. Кудряшова, Е.С. Нагорнова ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ.....	58
Е.А. Лизина, В.Н. Щенников ДВУХУРОВНЕВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ГИБРИДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯМИ.....	62
М.А. Захарова, А.М. Ахтямов ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕСТКОСТИ ПРУЖИНЫ ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ.....	65
В.Н. Коханенко, М.Ф. Мицик РЕШЕНИЕ ПЛАНОВОЙ ЗАДАЧИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА В ШИРОКОМ ОТВОДЯЩЕМ РУСЛЕ.....	68
В.Н. Коханенко, М.Ф. Мицик ОСОБЕННОСТИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА ЗА БЕЗНАПОРНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ.....	77
В.Н. Коханенко, М.Ф. Мицик ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА ЗА ВОДОПРОПУСКНЫМИ ТРУБАМИ.....	87
И. Арутюнян, М.Э. Сивуха, Р.Л. Седов О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ.....	97

Г.А. Никифоров О ГРАВИТАЦИОННОМ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ЖИДКОСТИ В СЛОИСТЫХ НЕФТЯНЫХ ПЛАСТАХ.....	101
С.Д. Алгазин ЗАДАЧА СТЕКЛОВА.....	104
<u>2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ.....</u>	
И.Н. Статников, Г.И. Фирсов РАНДОМИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СОБОЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	110
Л. Б. Матусов О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РАВНОМЕРНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ.....	112
Д. Г. Саникидзе, М.Г. Мирианашвили О РАВНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ С РАЗОМКНУТЫМИ КОНТУРАМИ.....	117
М.В. Кравченко КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЛАПЛАСОВЫХ ПОЛЕЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА КОШИ.....	120
И.В. Бойков, Е.В. Кучумов НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.....	131
<u>3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, ДЕМОГРАФИИ, СОЦИАЛЬНЫХ НАУК.....</u>	
Ю.Ф. Захарова, А.Н.Смекалина ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ.....	134
Е.Н. Берникова, Е.А. Амосов МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ОБУВИ.....	136
Э.К. Самерханова МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ.....	139

Е.Б. Захарикова РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ.....	141
С.Н. Эйрих ВАРИАНТ КОМБИНИРОВАНИЯ АЛГОРИТМА ИМИТАЦИОННОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ С ЭВРИСТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ.....	143
Д.В. Степовой ДЕКОМПОЗИЦИЯ ГРАФОВЫХ МОДЕЛЕЙ МНОГОУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ.....	146
А.К. Гришко, В.А. Корж АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНОЙ ОБРАБОТКИ ТРАЕКТОРНОЙ МАТРИЦЫ.....	148
С.Е. Игошина, Т.Ю. Просвирнина ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЕЛИЧИНЫ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ РАБОЧИХ В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ 1920-х годов (НА МАТЕРИАЛАХ ПЕНЗЕНСКОЙ ГУБЕРНИИ).....	152
С.Е. Игошина, А.А. Карманов ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РАДИОПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ Ni-Zn ФЕРРИТОВ.....	154
Ю.В. Напалкова ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ МНОЖЕСТВЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТРАХОВОЙ ОРГАНИЗАЦИИ.....	156
В.В. Шахов О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ СМО В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ.....	159
В.В. Шахов ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ВНЕДРЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ DDoS АТАКАМ.....	161

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ.....	163
Т.В. Черушева ВЫДЕЛЕНИЕ РЕЧЕВОГО СИГНАЛА ИЗ СУММЫ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ.....	163
Ю.Ф. Захарова, А.Н. Алаткин ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ СТЕГАНОГРАФИИ.....	166
В.А. Васильев, П.С.Чернов КЛЕТОЧНЫЕ АВТОМАТЫ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	168
С.А. Москалев МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДАТЧИКОВ ДАВЛЕНИЯ.....	171
И.А. Долгова, Б.В. Чувькин, И.А. Сидорова МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ МОДЕЛЬ МИКРОМОЩНОГО МАСШТАБИРУЮЩЕГО УСИЛИТЕЛЯ.....	173
Н.Я Карасев ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБОВ ТОНКОСТЕННЫХ ПЛАСТИН ПОСЛЕ ФИНИШНОЙ ОБРАБОТКИ.....	175
Ю.С. Семерич, Д.В. Тарасов МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ.....	179
Е.Г. Романова, Ю.С. Семерич МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПИРАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ.....	183
А.В. Разумов, В.А. Гришанова ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ КРОНИГА – ПЕННИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСЧЕТУ ПРИМЕСНОЙ ЗОНЫ В КВАНТОВОЙ ПРОВОЛОКЕ С ОДНОМЕРНОЙ СВЕРХРЕШЕТКОЙ ИЗ ПОТЕНЦИАЛОВ НУЛЕВОГО РАДИУСА.....	185

Д.И. Васюнин РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ДВУХСЛОЙНЫМ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ОБРАЗЦА МАТЕРИАЛА.....	189
Б.В. Чувыкин, Р.Г. Тер-Аракелян, И.А. Сидорова ЭНТРОПИЙНАЯ ОЦЕНКА ИНФОРМАТИВНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ШКАЛОЙ КВАНТОВАНИЯ.....	192
К.В. Иванов, П.П. Першенков, О.В.Башкиров КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.....	195
А.В. Селезнев, И.А. Сидорова, Р.Г. Тер-Аракелян МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТИПА SIGN.....	198
В.Б. Лебедев, Е.В. Паршина ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕТОК С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРА ЗАМЫКАНИЯ.....	201
Э.К. Самерханова, Е.В. Мочалова ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.....	204
М.Н. Морозова, В.А. Соловьев МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБУЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО КОЛОРИМЕТРА НА ОБРАЗЦОВЫХ МЕРАХ ЦВЕТА.....	207
А.В. Кудряшов ЭВОЛЮЦИЯ УГЛА ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПРОЦЕССАХ КОНЕЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРУГОВЫХ ОБОЛОЧЕК.....	221
Д.Н. Шишулин МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ НА ИЗЛУЧЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ.....	215

А.Н. Грекова МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ.....	219
Г.С. Садовой ФОРМЫ ПРИНЦИПА ИЗМЕНЧИВОСТИ.....	221
Ю.А. Парфёнова, А.А. Малышев РАНИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В МОДЕЛИРОВАНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ.....	224
А.Н. Купцов, Ю.А. Држевецкий К ВОПРОСУ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛАНДШАФТНОГО ПОЖАРА НА ТЕРРИТОРИИ ВЗРЫВООПАСНЫХ ОБЪЕКТОВ ХРАНЕНИЯ..	227
М.С. Горбалысов МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ АНТЕННЫ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ РАДИОЛУЧЕВОЙ СИСТЕМЫ.....	234
А.В. Калинина, Е.Н. Калинин ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАНТОВЫХ МОЛЕКУЛ С КВАЗИСТАЦИОНАРНЫМИ D(-)-СОСТОЯНИЯМИ.....	237
А.С. Слюсарев, А.С. Яблоков СОЗДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ЗАЧЕРПЫВАНИЯ ВОДОНАСЫЩЕННОГО МАТЕРИАЛА ГРЕЙФЕРОМ.....	239
В.А. Раченкова, П.С. Самоловов, Е.Г. Фоминых, Т.Э. Овчинникова..... ЗАДАЧА ТЕПЛОМАССОБМЕНА В АКСИАЛЬНОМ ПАРОГАЗОВОМ ПОТОКЕ.....	243
В.А. Раченкова, П.С. Самоловов, Е.Г. Фоминых, М.П. Анисимов ТЕПЛОМАССОБМЕН В АКСИАЛЬНОМ ЛАМИНАРНОМ ПАРОГАЗОВОМ ПОТОКЕ С УЧЁТОМ НЕИДЕАЛЬНОСТИ ГАЗА.....	248
В.Д. Кревчик, З.А. Гаврина, С.А. Губина МОДЕЛЬ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО D(-)-СОСТОЯНИЯ В КВАНТОВОЙ МОЛЕКУЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.....	253

О.А. Быкова МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРАБОТКИ ГАЗОГИДРАТНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ.....	259
О.Е. Каледин ОБЛАЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ПЛАТФОРМЕ WINDOWS AZURE.....	263
5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАНОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И НАНОСТРУКТУР.....	265
Е.Е. Гришина ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НАНОМАТЕРИАЛОВ.....	265
И.А. Аверин, И.А. Губич, В.Ю. Дарвин, Р.М. Печерская МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГЕТЕРОСТРУКТУР НА ОСНОВЕ ПОРИСТОГО ОКСИДА АЛЮМИНИЯ.....	268
И.А. Аверин, И.А. Пронин, Р.М. Печерская МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НУКЛЕОФИЛЬНОГО РОСТА ФРАКТАЛЬНЫХ НАНОСИСТЕМ.....	269
<u>6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ.....</u>	<u>272</u>
Н.Ф. Добрынина КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБРАЗОВАНИЯ.....	272
М.В. Астафурова, В.И. Астафуров МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАНОСТРУКТУР: ТЕОРЕМА О МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЕ.....	277
Н.В. Мойко, Н.В. Печникова, Т.В. Черушева МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАНОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР.....	289
<u>СОДЕРЖАНИЕ.....</u>	<u>289</u>

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ И СОЦИАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ**

Сборник статей

Под редакцией ***И.В. Бойкова***

Редактор ***Г.В. Семенова***

Ответственный за выпуск – ведущий специалист образовательных
программ ПДЗ ***А.И. Лунькова***

Компьютерная верстка ***А.А. Щербаковой***

Подписано в печать 28.04.2011

Формат 60×84 1/16

Бумага тип. № 1

Отпечатано на ризографе

Уч.-изд. л. 17,6

Тираж 90 экз.

Заказ 106

АННОО «Приволжский Дом знаний»

440026, г. Пенза, ул. Лермонтова, 8А

Множительный участок ПДЗ

440026, г. Пенза, ул. Лермонтова, 8А

ДЛЯ ЗАМЕТОК

математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и
социальных проблем

Сборник статей

Под редакцией ***И.В. Бойкова***

Редактор ***В.С. Назарова***

Ответственный за выпуск – ведущий специалист образовательных
программ ПДЗ ***А.И. Лунькова***

Компьютерная верстка ***К.В. Кузнецовой***

Подписано в печать 30.04.2010

Формат 60×84 1/16

Бумага тип. № 1

Отпечатано на ризографе

Уч.-изд. л. 14,08

Тираж 77 экз.

Заказ 123

АННОО «Приволжский Дом знаний»
440026, г. Пенза, ул. Лермонтова, 8А
Множительный участок ПДЗ
440026, г. Пенза, ул. Лермонтова, 8А